UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Causalità e purezza nei sistemi quantistici nell'ambito delle teorie probabilistiche operazionali

Relatore
Prof. Pieralberto Marchetti

Laureando
Matteo Zatti

Anno Accademico 2017/2018

Sommario

Nella tesi si analizzano alcune proprietà della meccanica quantistica nel contesto più generale delle teorie probabilistiche operazionali. Le strutture matematiche utilizzate sono definite nell'ambito della teoria delle categorie, descritte anche con un linguaggio grafico, ma sono derivate costruttivamente dalle idee intuitive di sistema e processo. Gli assiomi introdotti sono i minimi indispensabili in tale formalismo per ottenere rilevanti risultati riguardanti causalità e purezza.

Indice

Introduzione

La meccanica quantistica è una teoria la cui formulazione segna un punto di svolta nello sviluppo della fisica in quanto, assieme alla relatività speciale, è la prima teoria fortemente non intuitiva che è stata sviluppata, ovvero è la prima teoria che non si basa sull'intuizione indotta naturalmente dall'esperienza umana. Essa descrive fenomeni che avvengono a scale molto inferiori alle scale tipiche in cui l'uomo è abituato ad esperire la realtà e sono incompatibili con una qualsiasi descrizione classica. Tramite gli esperimenti atti a verificare le disuguaglianze di Bell si è infatti dimostrato che nella meccanica quantistica è necessario ammettere la presenza di una forma di "azione a distanza", talora denominata "passione", che non trasmette informazioni, ma senza la quale le correlazioni fra gli esiti di misure su sistemi posti ad intervalli di tipo spazio non sono riproducibili[1]. La formulazione della teoria ha richiesto il contributo di molte delle menti più brillanti del XX secolo (ad esempio Bohr, Born, Dirac, Einstein, Heisenberg, Schroedinger, ecc.) ma sarà solo grazie al lavoro di J. Von Neumann del 1932 che si otterrà una struttura formale rigorosa. La ricerca della consistenza formale comporta però che i postulati e gli assiomi siano formulati non in termini operazionali bensì facendo riferimento agli spazi di Hilbert, ovvero a strutture matematiche astratte. Da ciò emerge quindi in maniera naturale una necessità che coincide col proposito del seguente lavoro: la ricerca di un'assiomatica equivalente per la meccanica quantistica formulata in termini di principi fisici. Per poter rifondare la meccanica quantistica è però necessario non essere a priori limitati dal formalismo degli spazi di Hilbert, pertanto l'assiomatica viene sviluppata nell'ambito più generale delle teorie probabilistiche operazionali (in breve OPT), presentate nel capitolo 3. Gli assiomi che si introduranno e di cui si indagheranno le implicazioni sono una selezione di quelli presentati in [6], [4], [5]. Nel capitolo 4 ci si concentrerà sulle conseguenze che ha la richiesta che le OPT (e quindi la meccanica quantistica) siano teorie causali ottenendo che alla causalità è strettamente legata la possibilità che vi sia o meno trasmissione non locale di informazione. Nel capitolo 5 si studierà invece il ruolo della nozione di stato puro (cioè di informazione massimale) nei sistemi quantistici e le conseguenze della richiesta che uno stato possa sempre essere purificato, ovvero che estendendo il sistema su cui è definito gli si possa associare un'estensione che sia uno stato puro. Quest'ultima richiesta garantisce alcuni interessanti risultati, quali la possibilità di caratterizzare una generica trasformazione di un sistema in termini di evoluzioni unitarie e misure su un sistema più esteso o l'inestensibilità di una teoria in cui

[1] La passione non trasmette informazioni in quanto non può essere verificata in altro modo che confrontando le correlazioni fra i risultati tramite comunicazione classica. La meccanica quantistica dotata di tale azione a distanza non viola pertanto la località dell'interazione della meccanica classica.

ogni stato è purificabile nel momento in cui si fissano gli stati, e costituisce l'assioma che permette di selezionare fra tutte le teorie descrivibili col formalismo delle OPT la classe di teorie della meccanica quantistica. La possibilità di purificare uno stato misto non è infatti possibile nell'ambito della meccanica classica ove gli stati puri sono prodotti di stati puri. Il formalismo utilizzato per esprimere il tutto sarà grafico ed avrà il pregio di essere estremamente intuitivo.
Col fine di evidenziare la naturalezza con cui emerge il formalismo delle OPT da principi e assunzioni di natura fisica il capitolo 1 è dedicato alla derivazione esplicita del formalismo. In particolare esso si sviluppa costruttivamente nell'ambito della teoria delle categorie dalle idee intuitive di sistema fisico e processo fisico, seguendo [2]. Il capitolo 2 è invece dedicato a mostrare esplicitamente che la meccanica quantistica è compatibile col il formalismo introdotto.

CAPITOLO 1

Elementi di teoria delle categorie

Il formalismo delle *teorie probabilistiche operazionali* (operational probabilistic theories, OPT), introdotto ed utilizzato nei prossimi capitoli, è proprio della teoria dell'informazione ed è caratterizzato dall'essere un linguaggio di alto livello (nel senso informatico del termine) in quanto le proposizioni in esso formulate sono rappresentate graficamente, al pari delle manipolazioni che vi si possono operare, rendendone l'utilizzo estremamente intuitivo. Tale pregio della struttura formale non implica però in alcun modo una perdita di rigore matematico in quanto essa trova preciso fondamento nella teoria delle categorie. Nel capitolo seguente si esporranno quindi le nozioni basilari di tale branca della matematica mostrando come esse emergano spontaneamente da alcune richieste ed assunzioni implicite presenti nella nozione stessa di cosa sia un teoria fisica. In particolare, nel paragrafo 1.1 si esporrà una deduzione euristica del formalismo; nel paragrafo 1.2 verrà presentato il linguaggio grafico ad esso associato; nell'appendice A si approfondiranno alcuni dettagli del formalismo necessari a renderlo rigorosamente compatibile con le strutture matematiche solitamente utilizzate nella descrizione di teorie fisiche.

1.1 Struttura di una teoria fisica

Per definire una teoria fisica è necessario specificare due famiglie di elementi che la caratterizzano: quali siano i sistemi fisici da essa descritti e quali siano i processi fisici fra sistemi da essa contemplati.

Esempio 1.1. Esempi di sistemi e processi: (a) Meccanica quantistica (MQ): spazi di Hilbert; evoluzione dello stato di un sistema tramite misura ed evoluzione unitaria (in generale tramite l'utilizzo di un quantum instrument). (b) Meccanica/teoria di campo classica: spazio delle fasi; evoluzione generata dalle equazioni della dinamica discendenti dalla minimizzazione dell'azione.

Assumendo le nozioni di *sistema fisico* (o semplicemente sistema) e di *processo fisico* (processo) come *concetti primitivi*, si intuisce, dalle osservazioni precedenti, che la nozione astratta di teoria fisica debba essere formalizzata tramite una struttura che contempli la presenza di due famiglie di elementi (appunto i sistemi e i processi) senza però che sia necessario specificare le strutture formali degli stessi (1,2). Implementando oltre a ciò l'assunzione che ad ogni processo sia associata univocamente una coppia di sistemi (detti iniziale e finale),[1] che il non far nulla sia anch'esso un processo a cui può essere sottoposto un sistema e che, dati più processi con opportuni sistemi associati, il loro *concatenamento* sia a sua volta un processo e sia indipendente dall'ordine ma non dal verso con cui viene eseguita l'operazione (ovvero assumendo il concatenamento associativo), segue che la famiglia dei processi di una teoria deve avere struttura monoidale[2](3). Emerge dunque in maniera naturale la formalizzazione di una teoria fisica tramite la nozione di categoria. Vale infatti la definizione seguente:

Definizione 1.2. Una *categoria* $\mathbf{C}$ è costituita da:

1 Una classe $|\mathbf{C}|$ i cui elementi sono detti *oggetti*.

2 $\forall\ A, B \in |\mathbf{C}|$, un insieme $\mathbf{C}(A, B)$ i cui elementi sono detti *morfismi*.

3 Un'operazione $\circ$ di composizione fra i morfismi tale che $\forall\ A, B, C \in |\mathbf{C}|$, $\forall f \in \mathbf{C}(A, B)$, $\forall g \in \mathbf{C}(B, C)$:
   - $\exists\, h \in \mathbf{C}(A, C)$ tale che $g \circ f = h$.
   - $\circ$ è associativa, ovvero $\forall\ D \in |\mathbf{C}|$, $\forall j \in \mathbf{C}(C, D)$, $(j \circ g) \circ f = j \circ (g \circ f)$.
   - $\exists\ 1_A \in \mathbf{C}(A, A)$, $\exists\ 1_B \in \mathbf{C}(B, B)$, dette *identità* tali che $f = f \circ 1_A = 1_B \circ f$.

Una teoria fisica quindi non sarà altro che una categoria ove la classe degli oggetti e l'unione degli insiemi dei morfismi corrisponderanno, rispettivamente, alla famiglia dei sistemi ed alla famiglia dei processi.
Il concetto di sistema gode di un'ulteriore proprietà: dati due sistemi (non necessariamente distinti o interagenti), è sempre possibile considerare tali sistemi come un unico sistema. Il concetto di sistema presenta quindi, al pari del concetto di processo con la nozione di composizione, la nozione di un'operazione ad esso legata: un'operazione binaria associativa di *accorpamento dei sistemi* che a due sistemi ne associa univocamente un terzo (4). Conseguenza immediata di tale operazione è la nozione di un'operazione analoga, anch'essa associativa, di *accorpamento dei processi* che permette di associare a due processi che avvengono fra due coppie di sistemi il processo accorpato che avviene fra la coppia dei sistemi accorpati (avente cioè per sistema iniziale il sistema ottenuto accorpando i sistemi iniziali dei processi considerati e per sistema finale il sistema ottenuto accorpando i sistemi finali dei processi considerati) (5). Implementando all'interno della nozione di teoria le assunzioni che le operazioni di accorpamento sussistono, che il nulla è esso stesso un sistema (ovvero che esiste un sistema che lascia invariato qualsiasi sistema a cui viene accorpato), che accorpare la composizione di processi equivale a comporre accorpamenti di processi (6) e che l'accorpamento del non far nulla su due sistemi equivale al non far nulla su due sistemi accorpati (7), segue l'emergere naturale della più ricca struttura formale delle categorie monoidali simmetriche strette. Vale infatti la definizione seguente.

[1] I quali possono anche coincidere.

[2] La struttura della famiglia dei processi è detta intuitivamente monoidale ma non è propriamente quella di un monoide in quanto l'operazione di composizione non è definita per coppie di elementi qualsiasi bensì soltanto per processi aventi dominio e codominio componibili. Alcuni sottoinsiemi di tale famiglia (quali i processi da un sistema in se stesso) sono però effettivamente dei monoidi.

Definizione 1.3. Una categoria $\mathbf{C}$ è detta *categoria monoidale stretta* (strict monoidal category) se gode delle seguenti proprietà:

4 $\exists \otimes$ operazione binaria fra gli oggetti, $\otimes : |\mathbf{C}| \times |\mathbf{C}| \to |\mathbf{C}|$ tale che $(|\mathbf{C}|, \otimes)$ abbia struttura di monoide, ovvero tale che:

- $\otimes$ è associativa, ovvero $\forall\ A, B, C \in |\mathbf{C}|,\ (A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$.
- $\exists\ I \in |\mathbf{C}|$ tale che $\forall\, A \in |\mathbf{C}|,\ A \otimes I = A = I \otimes A$.

5 $\exists\ *$ operazione binaria fra i morfismi, $* : \mathbf{C}(A, B) \times \mathbf{C}(C, D) \to \mathbf{C}(A \otimes C, B \otimes D)$ $\forall\ A, B, C, D \in |\mathbf{C}|$ tale che:

- $*$ è associativa, ovvero $\forall\ E, F \in |\mathbf{C}|$, $\forall\ f \in \mathbf{C}(A, B)$, $\forall\ g \in \mathbf{C}(C, D)$, $\forall\ h \in \mathbf{C}(E, F)$, $(f * g) * h = f * (g * h)$.
- $\exists\ 1_I \in \mathbf{C}(I, I)$ tale che $\forall\, f \in \mathbf{C}(A, B)$, $f * 1_I = f = 1_I * f$.

6 $\forall\ A, B, C, D, E, F \in |\mathbf{C}|$, $\forall\ f \in \mathbf{C}(A, B)$, $\forall\ g \in \mathbf{C}(B, C)$, $\forall\ h \in \mathbf{C}(D, E)$, $\forall\ k \in \mathbf{C}(E, F)$ vale la relazione: $(g \circ f) * (k \circ h) = (g * k) \circ (f * h)$.

7 $\forall\ A, B \in |\mathbf{C}|$ vale la relazione: $1_A * 1_B = 1_{A \otimes B}$.

Prima di procedere ulteriormente sono necessarie alcune precisazioni:

Osservazione 1.4.

- Il simbolo $\otimes$ non corrisponde in questo contesto al prodotto tensoriale (a cui tale simbolo è generalmente associato) bensì ad un generico prodotto monoidale (pur rimanendo il prodotto tensoriale un prodotto monoidale). Inoltre la nozione intuitiva dell'operazione di accorpamento tramite cui esso è stato introdotto è differente, pur se somigliante, dall'operazione di unione: per l'unione vale la relazione $A \cup A = A$ che in generale non vale per un prodotto monoidale ($A \otimes A \neq A$).
- Il simbolo $*$ è anch'esso associato ad un prodotto monoidale (se considerato assieme all'insieme di tutti i morfismi) e non essendoci ambiguità alcuna nella distinzione fra oggetti e morfismi è possibile, pur commettendo un piccolo abuso di notazione, utilizzare per entrambi i prodotti monoidali lo stesso simbolo.

Si pone dunque:

Notazione 1.5. Al simbolo $*$ è sostituito il simbolo $\otimes$.

Vi è infine un'ultima proprietà della nozione intuitiva di teoria fisica da implementare nella struttura formale costruita: dati due sistemi, il sistema accorpato ad essi associato non varia al variare dell'ordine con cui essi sono accorpati (e lo stesso vale per i processi). Si richiede pertanto che le operazioni di accorpamento siano commutative (8,9). Nell'ambito della teoria delle categorie tale proprietà, per quanto dotata di un corrispettivo ben preciso, non è banalmente formalizzabile come quelle affrontate finora ed è necessario definire cosa sia un *isomorfismo*.

Definizione 1.6. Data una categoria $\mathbf{C}$, siano $A, B \in |\mathbf{C}|$. Un morfismo $f \in \mathbf{C}(A, B)$ è detto *isomorfismo* se $\exists\, g \in \mathbf{C}(B, A)$ tale che: $f \circ g = 1_B$ e $g \circ f = 1_A$.
$f^{-1} := g$ é detto l'inverso di f e i due oggetti A, B sono detti isomorfi.

Introdotta tale definizione è possibile quindi definire le categorie monoidali strette (strict symmetrical monoidal categories, SSMC).

Definizione 1.7. Una categoria monoidale stetta $\mathbf{C}$ è detta *categoria monoidale simmetrica stretta* (SSMC) se è dotata di una famiglia di isomorfismi

$$\{\, \sigma_{A,B} \in \mathbf{C}(A \otimes B, B \otimes A) \mid A, B \in |\mathbf{C}|\,\}$$

detti *simmetrie* tali che:

8 $\forall\, A, B \in |\mathbf{C}|,\ \ \sigma^{-1}_{A,B} = \sigma_{B,A}$.

9 $\forall\, A, B, C, D \in |\mathbf{C}|, \forall\, f \in \mathbf{C}(A, C), \forall\, g \in \mathbf{C}(B, D),\ \ \sigma_{C,D} \circ (f \otimes g) = (g \otimes f) \circ \sigma_{A,B}$

Osservazione 1.8. La richiesta al punto (9) della definizione 1.7 equivale alla richiesta che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} A \otimes B \arrow[r, "\sigma_{A,B}"] \arrow[d, "f\otimes g"'] & B \otimes A \arrow[d, "g\otimes f"] \\ C \otimes D \arrow[r, "\sigma_{C,D}"'] & D \otimes C \end{tikzcd}$$

Con la nozione di SSMC si completa la deduzione euristica della struttura formale alla nozione intuitiva di teoria fisica tramite l'utilizzo della teoria della categorie.

1.2 Proprietà delle SSMC

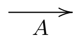
Se nel paragrafo precedente si sono messe in evidenza le ragioni fisiche che portano all'identificazione di una teoria fisica con un'opportuna SSMC, nulla si è ancora fatto per legittimare la necessità e l'utilità di un formalismo a tal punto astratto e pesante. A giustificare tutto ciò basta però una singola proprietà delle SSMC: l'esistenza di un linguaggio grafico equivalente a quello algebrico (di seguito non si specificherà e non si indagherà ulteriormente la nozione di linguaggio grafico; per una presentazione rigorosa riferita nella fattispecie al linguaggio grafico associato alle SSMC si veda [16]).
Utilizzando d'ora innanzi esclusivamente la terminologia propria della teoria delle categorie (oggetti e morfismi al posto di sistemi e processi), si pone:

Definizione 1.9. Data $\mathbf{C}$ categoria monoidale stretta simmetrica, siano $A, B, C, D \in |\mathbf{C}|$, $f \in \mathbf{C}(A, B)$, $g \in \mathbf{C}(B, C)$, $h \in \mathbf{C}(C, D)$. I simboli del formalismo algebrico tramite cui essa è stata definita (definizioni 1.2, 1.3, 1.7) vengono tradotti graficamente nel modo seguente:

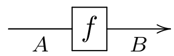
Morfismi

1_I — *nulla*

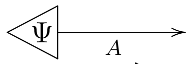
1_A



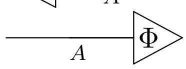
$f : A \to B$



$\Psi : I \to A$

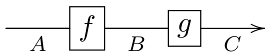


$\Phi : A \to I$

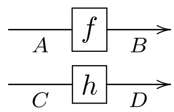


Operazioni

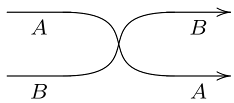
$g \circ f$



$f \otimes h$



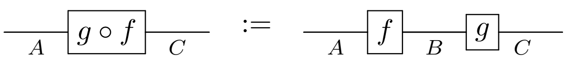
$\sigma_{A,B}$



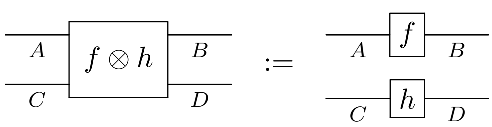
La totalità dei simboli grafici con cui si traducono i morfismi costituiscono l'*alfabeto* del linguaggio grafico, la totalità dei simboli grafici con cui si traducono le operazioni costituiscano la *grammatica generativa* del linguaggio.

Si introduce inoltre la notazione seguente:

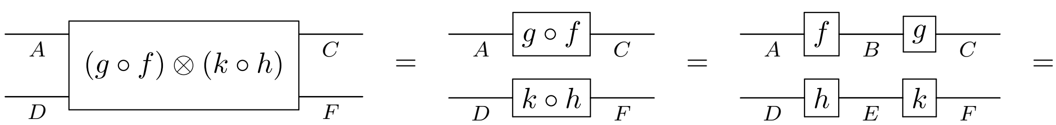
Notazione 1.10. Alla composizione si sostituisce il diagramma

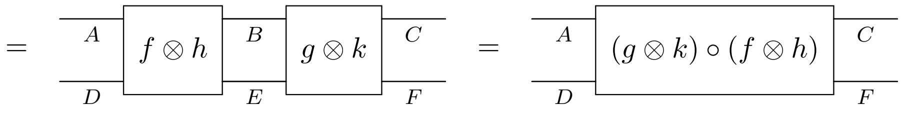


Notazione 1.11. Al prodotto monoidale si sostituisce il diagramma



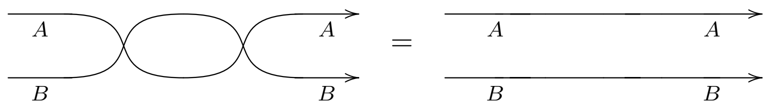
Osservazione 1.12. Le notazioni poste rendono la richiesta al punto (6) della definizione 1.3 una tautologia grafica. Valgono infatti le seguenti equivalenze fra diagrammi:





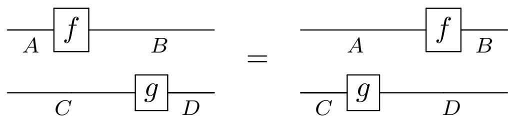
I diagrammi costruiti con tali elementi (ovvero le proposizioni formulate tramite linguaggio grafico) sono soggetti alle manipolazioni derivate dalla traduzione in linguaggio grafico delle poprietà costituenti la definizione di SSMC. In particolare fra le più significative vi sono:

Proposizione 1.13. *Gli isomorfismi di simmetria sono tali che* $\sigma_{B,A} \circ \sigma_{A,B} = 1_A \otimes 1_B$, *ovvero:*

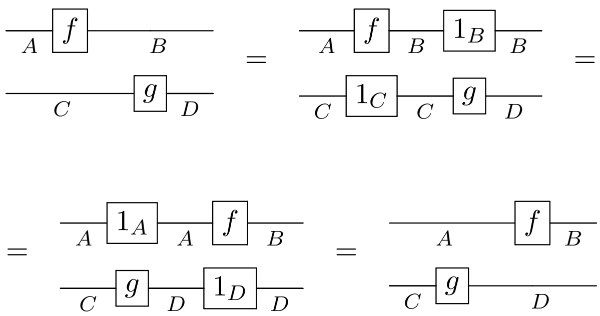


Dimostrazione. Per ipotesi di SSMC vale la proprietà (8) da cui $\sigma_{B,A} = \sigma^{-1}_{A,B}$. Segue che $\sigma_{B,A} \circ \sigma_{A,B} = \sigma^{-1}_{A,B} \circ \sigma_{A,B} = 1_{A \otimes B} = 1_A \otimes 1_B$. □

Proposizione 1.14. *Dati i morfismi* $f \in \mathbf{C}(A, B)$, $g \in \mathbf{C}(C, D)$, *vale che*



Dimostrazione. Sfruttando il linguaggio grafico



□

Ovvero, intuitivamente, il duplice intreccio di due fili coincide con il non far nulla ed è possibile far scorrere liberamente le celle (corrispondenti all'applicazione dei morfismi), lungo i fili. Vale infine il teorema:

Teorema 1.15. *Un'equazione fra morfismi nel linguaggio algebrico delle SSMC è derivabile dagli assiomi delle SSMC se e solo se è derivabile a meno di isomorfismi tramite linguaggio grafico.*

Dimostrazione. Omessa.[3] □

Grazie al teorema 1.15 è quindi possibile riconoscere (tramite la sola applicazione dell'osservazione 1.12 delle proposizioni 1.13 ed 1.14) come banali tautologie grafiche tutte e sole le equivalenze algebriche formulabili all'interno del formalismo (le quali avrebbero altrimenti necessitato, in generale, di imponenti diagrammi commutativi).
Mostrata la potenzialità del linguaggio è doveroso porre l'attenzione sul raffinamento di alcuni dettagli tecnici i quali, per quanto tediosi, sono di vitale importanza per garantire la consistenza del formalismo sviluppato con le teorie fisiche esistenti. La struttura introdotta, ovvero la SSMC, è impostata in modo da non necessitare la specificazione di quali siano le strutture degli oggetti e dei morfismi che la compongono, così che ad essa possano ricondursi tutte le teorie fisiche senza limitazioni. Tuttavia tale obbiettivo, anche se apparentemente raggiunto, non è completamente soddisfatto. La SSMC descrive infatti la struttura di una *categoria del mondo reale*, ovvero una categoria derivata dalla semplice classificazione dei sistemi in esame e dei processi ad essi legati in, rispettivamente, oggetti e morfismi della categoria. Tale struttura è funzionale per un approccio alla trattazione di sistemi e processi intuitivo ed astratto ma è incompatibile con la modellizzazione rigorosa degli oggetti tramite strutture matematiche basate sulla teoria degli insiemi (e dunque tramite insiemi, gruppi, spazi vettoriali, spazi di Hilbert, ecc.). Infatti, in generale, le uguaglianze strette che compaiono al punto (4) della Definizione 1.3 non possono valere come tali e devono essere sostituite da uguaglianze a meno di isomorfismi.

Esempio 1.16. Vale per gli insiemi la relazione

$$X \times (Y \times Z) \simeq (X \times Y) \times Z \qquad \text{e non} \qquad X \times (Y \times Z) = (X \times Y) \times Z$$

L'approccio utilizzato per risolvere il problema di consistenza prevede l'utilizzo di una *categoria concreta* (ovvero di una categoria i cui oggetti sono strutture matematiche ben definite basate sulla teoria degli insiemi e i cui morfismi sono applicazioni che preservano la struttura degli oggetti) e di opportune mappe fra categorie. Mappando la struttura delle SSMC (traducibile nel linguaggio grafico precedentemente descritto) con la categoria concreta sopracitata è infatti possibile costruire un linguaggio formale grafico e presentante oggetti aventi strutture matematiche basate sulla teoria degli insiemi che sia anche consistente. Essendosi delineato brevemente il modo di procedere, si rimanda per una trattazione più dettagliata della questione all'appendice A. Le nozioni ivi contenute, per quanto fondamentali all'interno di un'esposizione completa e rigorosa del linguaggio formale, sono trascurabili nella trattazione successiva e non necessarie alla comprensione dei capitoli seguenti.

---
[3] Essa si basa sulla validità del risultato presentato in [16], Theorem 3.12

CAPITOLO 2

Formulazione operazionale della MQ

Nell'esposizione seguente si assumerà come nota la formulazione tradizionale della meccanica quantistica, ovvero la formulazione di J. Von Neumann basata sul formalismo degli spazi di Hilbert, e la sua estensione astratta, ovvero la formulazione che introduce la distinzione fra stato misto e stato puro basata sugli operatori densità e l'operazione di traccia parziale. La trattazione sarà inoltre svolta nell'ipotesi che gli spazi di Hilbert abbiano dimensione finita.
La formulazione tradizionale della meccanica quantistica prevede l'esistenza di due distinti processi evolutivi per i sistemi isolati: un'evoluzione deterministica (discendente dall'equazione di Schroedinger, postulata nell'*assioma di evoluzione unitaria*) e un'evoluzione probabilistica (esito dell'esecuzione di una misura di un'osservabile, postulata nell'*assioma di riduzione del pacchetto*). Tali processi sono facilmente caratterizzabili in termini operatoriali.

Definizione 2.1. Dato $\mathcal{H}$ spazio di Hilbert, sia ρ l'operatore densità associato allo stato del sistema.
Un processo di *evoluzione unitaria* è rappresentato da un operatore unitario U il quale agisce sullo stato del sistema come

$$\rho \;\rightarrow\; U\rho\, U^{\dagger}. \tag{2.1}$$

Data un'osservabile descritta da un operatore autoaggiunto E, indicati con $\{\, |a,k\rangle\}$ gli autostati ad esso associati, ove k è l'indice di degenerazione dell'autovalore a, e denotati i proiettori sugli autospazi con $E_a := \sum_{k=1}^{deg(a)} |a,k\rangle\, \langle a,k|$, la *misura ideale dell'osservabile* agisce sullo stato del sistema come

$$\rho \;\rightarrow\; \frac{E_a\, \rho\, E_a^{\dagger}}{tr\, E_a\, \rho\, E_a^{\dagger}} = \frac{E_a\, \rho\, E_a}{tr\, E_a\, \rho} \tag{2.2}$$

riportando l'esito a con probabilità

$$p_a = tr\, E_a\, \rho \tag{2.3}$$

Remark 2.2. Nella trattazione successiva, quando si vuole esplicitamente far riferimento ad una famiglia di processi fisici che a priori non è chiusa rispetto ad una qualche nozione di operazione di composizione, si farà riferimento ad essa come ad una famiglia di trasformazioni.

Definizione 2.3. Una trasformazione fra due sistemi è una mappa fra gli stati di quei sistemi.

Osservazione 2.4. Le trasformazioni legate all'evoluzione di un sistema sono dette processi evolutivi poichè al termine del presente capitolo si dimostrerà che se opportunamente generalizzate tali trasformazioni possono essere descritte da una famiglia di operatori chiusa rispetto alla composizione e quindi aventi struttura di processi.

I processi di evoluzione appena descritti sono processi contemplati dalla meccanica quantistica in quanto esplicitamente identificati dallo schema assiomatico. Che essi siano però le uniche trasformazioni possibili (assieme ai loro concatenamenti) non è a priori garantito da alcuna assunzione esplicita. Si pone dunque:

Assioma MQ 1. *I processi di evoluzione introdotti dagli assiomi di evoluzione unitaria e di riduzione del pacchetto uniti alle loro concatenazioni costituiscono tutte e sole le trasformazioni che avvengono in un sistema quantistico isolato.*

Non tutti i sistemi quantistici sono però isolati. Estendendo la trattazione a sistemi posti in contatto con altri sistemi accade che l'assioma 1 si applichi per il sistema complessivo ma non, in generale, per i sottosistemi. Sfruttando la validità dell'assioma per il sistema complessivo è però possibile comunque caratterizzare in maniera completa i *processi locali*, ovvero le trasformazioni che avvengono in un sottosistema in corrispondenza di un processo che avviene nel sistema complessivo.

Il processo locale avente forma più generale è indotto dall'esecuzione di un'evoluzione unitaria seguita da una misura proiettiva sul sistema complessivo (ovvero, per l'assioma 1, dall'esecuzione del processo avente forma più generale) ed è caratterizzato operatorialmente tramite la nozione di *strumento quantistico* (quantum instrument). Vale infatti che:

Definizione 2.5. Dato il sistema A, siano $\mathcal{H}_A$ lo spazio di Hilbert ad esso associato e ρ l'operatore densità associato allo stato del sistema. Uno *strumento quantistico* su $\mathcal{H}_A$ è una collezione di operatori lineari $\{M_{a,k}\}$ su $\mathcal{H}_A$ detti *operatori di Kraus* tale che

$$\sum_{k,a} M_{a,k}^{\dagger} M_{a,k} = \mathbf{1} \tag{2.4}$$

e tale che agisce sullo stato del sistema $\forall\, a$ corrispondente all'esito di una misura come

$$\rho \;\to\; \frac{\sum_k M_{a,k}\, \rho\, M_{a,k}^{\dagger}}{tr\left(\sum_k M_{a,k}^{\dagger} M_{a,k} \rho\right)} = \rho' \tag{2.5}$$

con probabilità

$$p_a = tr\left(\sum_k M_{a,k}^{\dagger} M_{a,k}\, \rho\right) \tag{2.6}$$

Ognuna delle trasformazioni $\rho \to \rho'$ è detta *operazione quantistica*.

Osservazione 2.6. Nella definizione 2.5 il ruolo degli indici k ed a è differente da quello nella definizione 2.1. Nel secondo caso a è l'indice dell'autovalore e k è l'indice di degenerazione. Nel primo il solo indice a indicizza gli autovalori associati allo strumento quantistico; il ruolo dell'indicizzazione tramite l'indice k è legato allo stato iniziale del sistema ausiliario con cui si mette in contatto il sistema di partenza. Per maggiori dettagli si rimanda alla dimostrazione del teorema 2.7.

Teorema 2.7. *Sia $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ lo spazio di Hilbert associato ad un sistema quantistico bipartito AB ottenuto ponendo in contatto il sistema A inizialmente isolato col sistema B. Una trasformazione su $\mathcal{H}_A$ è un processo locale se e solo se è rappresentata da uno strumento quantistico su $\mathcal{H}_A$.*

Dimostrazione. Si verificano separatamente necessità e sufficienza. *Necessità.* Siano ρ_A e ρ_B gli operatori densità associati, rispettivamente, ai sistemi A e B. Siano U_{AB} l'operatore che descrive un processo di evoluzione unitaria e $\{E_a\}$ i proiettori associati ad una misura su $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Sia infine $\{|\phi_i\rangle_B\}$ una base ortonormale di $\mathcal{H}_B$. Applicando a $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$ l'operatore di evoluzione unitaria e i proiettori di misura vale per le equazioni 2.1 e 2.2

$$\rho'_{AB} = \frac{E_a\, U_{AB}\,(\rho_{AB})\, U^\dagger_{AB}\, E^\dagger_a}{tr_{AB}\left(E_a\, U_{AB}\,(\rho_{AB})\, U^\dagger_{AB}\, E^\dagger_a\right)} \tag{2.7}$$

con probabilità di riportare l'esito a dato dall'equazione 2.3 da cui

$$p_a = tr_{AB}\left(E_a\, U_{AB}\,(\rho_{AB})\, U^\dagger_{AB}\, E^\dagger_a\right) \tag{2.8}$$

Sviluppando $\rho_B = \sum_j p_j\, |j\rangle_B \langle j|_B$, ove $0 \leq p_j \leq 1$ con $\sum_j p_j = 1$ e $\{|j\rangle_B\}$ sono gli autovettori di ρ_B, eseguendo un'operazione di traccia parziale su $\mathcal{H}_B$ ed omettendo la normalizzazione valgono le relazioni:

$$\begin{aligned}
\rho'_A = tr_B &\left(\sum_j E_a\, U_{AB}\ (\rho_A \otimes p_j\, |j\rangle_B \langle j|_B)\ U^\dagger_{AB}\, E^\dagger_a\right) = \\
= \sum_{j,i} &\langle \phi_i|_B\ E_a\, U_{AB}\ (\rho_A \otimes p_j\, |j\rangle_B \langle j|_B)\ U^\dagger_{AB}\, E^\dagger_a\ |\phi_i\rangle_B = \\
= \sum_{j,i} &\langle \phi_i|_B\ \sqrt{p_j}\, E_a\, U_{AB}\ |j\rangle_B\, \rho_A\, \langle j|_B\ \sqrt{p_j}\, U^\dagger_{AB}\, E^\dagger_a\ |\phi_i\rangle_B
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Definendo un unico indice k al posto della coppia di indici i, j ed introducendo nell'equazione 2.9 gli operatori lineari limitati (ove si sono sostituiti ad i e j le funzioni associate al cambio di indicizzazione)

$$M_{a,k} = \langle \phi_{i(k)}|_B\ \sqrt{p_{j(k)}}\, E_a\, U_{AB}\ |j(k)\rangle_B \tag{2.10}$$

definiti su $\mathcal{H}_A$, tenendo conto della normalizzazione e sfruttando le proprietà della traccia si ottiene:

$$\rho'_A = tr_B(\rho'_{AB}) = \frac{\sum_k M_{a,k}\, \rho_A\, M^\dagger_{a,k}}{tr_A\left(\sum_k M^\dagger_{a,k}\, M_{a,k}\, \rho_A\right)} \tag{2.11}$$

Sfruttando l'equazione 2.8 discende la probabilità di riportare l'esito a:

$$p_a = tr_A \left(\sum_k M^\dagger_{a,k} \, M_{a,k} \, \rho_A \right) \tag{2.12}$$

Sfruttando le proprietà di completezza della base $\{|\phi_i\rangle_B\}$ e dei proiettori vale $\forall \, a$:

$$\sum_k M^\dagger_{a,k} \, M_{a,k} = \sum_{j,i} \langle j|_B \, \sqrt{p_j} \, U^\dagger_{AB} \, E^\dagger_a \, |\phi_i\rangle_B \, \langle \phi_i|_B \, \sqrt{p_j} \, E_a \, U_{AB} \, |j\rangle_B =$$

$$\sum_j p_j \, \langle j|_B \, U^\dagger_{AB} \, E^\dagger_a \, E_a \, U_{AB} \, |j\rangle_B = \sum_j p_j \, \langle j|_B \, U^\dagger_{AB} \, E_a \, U_{AB} \, |j\rangle_B \tag{2.13}$$

Sommando su a l'equazione 2.13 si ottiene infine la relazione:

$$\sum_{a,k} M^\dagger_{a,k} \, M_{a,k} = \sum_{a,j} p_j \, \langle j|_B \, U^\dagger_{AB} \, E_a \, U_{AB} \, |j\rangle_B = \sum_j p_j \, \langle j|_B \, U^\dagger_{AB} \, U_{AB} \, |j\rangle_B =$$

$$= \sum_j p_j \, \langle j|_B \, \mathbf{1}_A \otimes \mathbf{1}_B \, |j\rangle_B = \mathbf{1}_A \tag{2.14}$$

Poichè per l'assioma 1 il processo locale descritto è quello avente forma più generale segue che un processo locale deve essere rappresentato da una famiglia di operatori $\{M_{a,k}\}$ che soddisfino le equazioni 2.11, 2.12, e 2.14, le quali coincidono con quelle della definizione di strumento quantistico. *Sufficienza.* La proposizione coincide con l'enunciato del teorema di Ozawa: *ogni strumento quantistico su $\mathcal{H}_A$, con operatori di Kraus $\{M_{a,k}\}$, è dato da un'evoluzione unitaria seguita da una misura in un opportuno sistema più estesto $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.* La dimostrazione del teorema è omessa[1]. □

L'indagine della struttura dei processi locali è quindi ridotta allo studio delle proprietà degli strumenti quantistici. In particolare si verifica che le operazioni quantistiche hanno struttura di processi, ovvero che la composizione di operazioni quantistiche è ancora un'operazione quantistica, e che, se la composizione viene opportunemente definita, anche gli strumenti quantistici hanno struttura di processi. Vale infatti che:

Proposizione 2.8. *Dato A sistema quantistico, siano $\mathcal{H}_A$ lo spazio di Hilbert ad esso associato, ρ l'operatore densità associato allo stato del sistema, $\{M_{a,k}\}$, $\{N_{b,j}\}$ due strumenti quantistici su $\mathcal{H}_A$. Allora*

1 Le operazioni quantistiche hanno struttura di processi, ovvero le applicazioni

$$\rho \xrightarrow{f} \frac{\sum_k M_{a,k} \, \rho \, M^\dagger_{a,k}}{tr\left(\sum_k M^\dagger_{a,k} M_{a,k} \, \rho\right)} \qquad \rho \xrightarrow{g} \frac{\sum_j N_{b,j} \, \rho \, N^\dagger_{b,j}}{tr\left(\sum_j N^\dagger_{b,j} N_{b,j} \, \rho\right)}$$

si possono comporre come

$$\rho \xrightarrow{g \circ f} \frac{\sum_{j,k} \left(N_{b,j} M_{a,k}\right) \, \rho \, \left(N_{b,j} M_{a,k}\right)^\dagger}{tr\left[\sum_{j,k} \left(N_{b,j} M_{a,k}\right) \, \rho \, \left(N_{b,j} M_{a,k}\right)^\dagger\right]} \tag{2.15}$$

e l'applicazione $g \circ f$ è ancora un'operazione quantistica con operatori $\{N_{b,j} M_{a,k}\}$, $\forall \, (a, b)$.

[1] Si veda [13] teorema 5.1. Una prova della versione astratta del teorema nell'ambito delle OPT sarà data nel capitolo 5.

2 *Gli strumenti quantistici con la composizione indotta dalla composizione sulle operazioni hanno struttura di processi, ovvero alla composizione degli strumenti $\{N_{b,j}\}$ e $\{M_{a,k}\}$ è associato lo strumento quantistico $\{N_{b,j}M_{a,k}\}$ avente per operazioni le composizioni delle operazioni degli strumenti composti.*

Dimostrazione. La dimostrazione consiste nella verifica delle relazioni riportate nella definizione 2.5 per la famiglia di operatori $\{N_{b,j}M_{a,k}\}$. La relazione 2.5 è soddisfatta per ipotesi. La relazione 2.18 è banalmente verificata tramite le proprietà della traccia, vale infatti:

$$p_a = tr\left(\sum_k M^\dagger_{a,k} M_{a,k}\,\rho\right) \qquad \rho'_a = \frac{\sum_k M_{a,k}\,\rho\, M^\dagger_{a,k}}{tr\left(\sum_k M^\dagger_{a,k} M_{a,k}\,\rho\right)} \qquad p_{b|a} = tr\left(\sum_j N^\dagger_{b,j} N_{b,j}\,\rho'_a\right)$$

$$p_{a,b} = tr\left[\sum_{j,k} (N_{b,j}M_{a,k})\;\rho\;(N_{b,j}M_{a,k})^\dagger\right] = p_a\, tr\left[\sum_{j,k} N_{b,j}\frac{(M_{a,k}\,\rho\, M^\dagger_{a,k})}{p_a} N^\dagger_{b,j}\right] = p_a\, p_{b|a}$$

Dalle relazione di completezza degli operatori $\{M_{a,k}\}$ e $\{N_{b,j}\}$ segue

$$\sum_{b,a,j,k} (N_{b,j}M_{a,k})^\dagger\;(N_{b,j}M_{a,k}) = \sum_{a,k} M^\dagger_{a,k}\left(\sum_{b,j} N^\dagger_{b,j}\, N_{b,j}\right) M_{a,k} = \sum_{a,k} M^\dagger_{a,k}\,\mathbf{1}_A\, M_{a,k} = \mathbf{1}_A$$

□

La nozione di quantum instrument corrisponde non solo alla nozione più generale possibile di processo locale ma anche alla nozione di trasformazione più generale possibile. Essa infatti contiene al suo interno anche quella di processo di evoluzione probabilistica e di evoluzione unitaria di un sistema isolato $\mathcal{H}_A$. Vale infatti che:

Proposizione 2.9. *I processi di evoluzione probabilistica e di evoluzione unitaria di un sistema isolato $\mathcal{H}_A$ sono rappresentabili tramite strumenti quantistici.*

Dimostrazione. Evoluzione unitaria. Per definzione l'evoluzione unitaria è un processo deterministico rappresentato dall'operatore unitario U che agisce sull'operatore densità ρ associato allo stato del sistema $\mathcal{H}_A$ tramite la relazione 2.1. Essa coincide con un processo locale descritto da un unico operatore di Kraus $M_{a,k} = M = U$, infatti valgono:

$$\sum_{a,k} M^\dagger_{a,k} M_{a,k} = U^\dagger U = \sum_k M^\dagger_{a,k} M_{a,k} = \mathbf{1}_A$$

$$p_a = tr\left(\sum_k M^\dagger_{a,k} M_{a,k}\,\rho\right) = tr(U^\dagger U\,\rho) = tr(\rho) = 1 = p$$

$$\rho\;\rightarrow\;\frac{\sum_k M_{a,k}\,\rho\, M^\dagger_{a,k}}{tr\left(\sum_k M^\dagger_{a,k} M_{a,k}\rho\right)} = U\,\rho\, U^\dagger$$

In particolare il determinismo dell'evoluzione unitaria si è tradotto nella probabilità $p = 1$ che il processo avvenga.
Evoluzione probabilistica. Per definizione l'evoluzione probabilistica è rappresentata dalla

famiglia dei processi associati ai proiettori $\{E_a\}$ dell'operatore hermitiano E associato alla misura che agisce come 2.2 con probabilità data da 2.3. Essa coincide con un processo locale descritto da una famiglia di operatori di Kraus indicizzati con il solo indice a, $M_{a,k} = M_a = E_a$, infatti valgono:

$$\sum_{a,k} M^\dagger_{a,k} M_{a,k} = \sum_a E^\dagger_a E_a = \sum_a E_a = \mathbf{1}_A$$

$$p_a = tr\left(\sum_k M^\dagger_{a,k} M_{a,k}\,\rho\right) = tr(E^\dagger_a\, E_a\,\rho) = tr(E_a\,\rho)$$

$$\rho \;\rightarrow\; \frac{\sum_k M_{a,k}\,\rho\, M^\dagger_{a,k}}{tr\left(\sum_k M^\dagger_{a,k} M_{a,k}\rho\right)} = \frac{E_a\,\rho\, E^\dagger_a}{tr(E_a\,\rho)} = \frac{E_a\,\rho\, E_a}{tr(E_a\,\rho)}$$

□

I risultati ottenuti sono quindi sintetizzati nel teorema seguente:

Teorema 2.10. *Le trasformazioni in un sistema quantistico inizialmente isolato sono rappresentate da tutti e soli gli strumenti quantistici ad esso associabili ed hanno struttura di processi.*

Dimostrazione. Sufficienza. Per il teorema 2.7 ogni strumento quantistico è rappresentazione di un opportuno processo locale il quale è una trasformazione. *Necessità.* Per l'assioma 1 tutte e sole le trasformazioni che avvengono su sistemi isolati sono ottenute per concatenamento di evoluzioni unitarie ed evoluzioni probabilistiche da cui segue che tutte e sole le trasformazioni che avvengono su un sottosistema inizialmente isolato sono processi locali in quanto indotte da processi di evoluzione. Per le proposizioni 2.9 e 2.8 i processi evolutivi di sistemi isolati sono rappresentati da strumenti quantistici e dunque lo sono tutte le trasformazioni su sistemi isolati. Per il teorema 2.7 i processi locali su sottosistemi inizialmente isolati sono rappresentati da strumenti quantistici e dunque lo sono tutte le trasformazioni su sistemi non isolati (inizialmente però isolati). La struttura di processi è implicata dalla proposizione 2.8. □

Remark 2.11. La misura ha struttura di processo se essa viene intesa come uno strumento quantistico, ovvero rappresentata dalla famiglia di proiettori associati all'operatore di misura (proposizione 2.9).

I processi finora trattati avvengono esclusivamente su singoli sistemi quantistici ovvero sono processi in cui lo stato iniziale e quello finale sono descritti da operatori densità definiti sul medesimo spazio di Hilbert. Sono quindi trascurati processi fra spazi di Hilbert distinti. Tale limitazione è però solo apparente poichè è possibile, come fatto in precendenza con lo studio dei processi locali, descrivere una trasformazione fra due sistemi A e B in termini di una trasformazione su un sistema più esteso ristretta. Si pone dunque la definizione:

Definizione 2.12. Dati $\mathcal{H}_A$ e $\mathcal{H}_B$ spazi di Hilbert inizialmente isolati, siano ρ_A e ρ_B gli operatori densità associati agli stati dei sistemi e sia f una trasformazione su $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Diremo processo indotto da f su $\mathcal{H}_A$ in $\mathcal{H}_B$ la trasformazione f_{A,B,ρ_B} tale che:

$$f_{A,B,\rho_B}(\rho_A) := tr_A\left[f(\rho_A \otimes \rho_B)\right] = \rho'_B \tag{2.16}$$

A garanzia del fatto che non vi siano altre trasformazioni ammesse fra sistemi distinti si pone:

Assioma MQ 2. *I processi fra due sistemi quantistici (non necessariamente distinti) indotti da una trasformazione sul sistema complessivo sono tutte e sole le trasformazioni che avvengono fra due sistemi quantistici.*

Valgono quindi i risultati:

Definizione 2.13. Dati i sistemi A e B, siano $\mathcal{H}_A$ e $\mathcal{H}_B$ gli spazi di Hilbert ad essi associati e ρ_A e ρ_B gli operatori densità associati agli stati dei sistemi. Uno *strumento quantistico generalizzato* su $\mathcal{H}_A$ è una collezione di operatori lineari e limitati $\{N_{a,m}\}$ detti *operatori di Kraus generalizzati* tale che:

- $N_{a,m} : \mathcal{H}_A \to \mathcal{H}_B$, operatore lineare $\forall\ a, m$.
- $\sum_{m,a} N^\dagger_{a,m} N_{a,m} = \mathbf{1}_A$

e tale che agisce su ρ_A $\forall\ a$ come:

$$\rho_A \ \to \ \frac{\sum_m N_{a,m}\,\rho_A\,N^\dagger_{a,m}}{tr_B\left(\sum_m N^\dagger_{a,m} N_{a,m}\rho_A\right)} = \rho'_B \tag{2.17}$$

con probabilità:

$$p_a = tr_B\left(\sum_m N^\dagger_{a,m} N_{a,m}\,\rho_A\right) \tag{2.18}$$

Ognuna delle trasformazioni $\rho \to \rho'$ è detta *operazione quantistica generalizzata.*

Teorema 2.14. *Le trasformazioni fra sistemi quantistici inizialmente isolati (non necessariamente distinti) sono rappresentate da tutti e soli gli strumenti quantistici generalizzati ad essi associabili ed hanno struttura di processi.*

Dimostrazione. Necessità. Per l'assioma 2 tutte le trasformazioni sono processi indotti. Per verificare l'implicazione è quindi sufficiente la verifica per un generico processo indotto. Sia f una trasformazione su $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ e sia $\{M_{a,k}\}$ lo strumento quantistico ad essa associato. Applicando la definizione 2.12 ad esso è associato il processo indotto seguente:

$$\rho_A \xrightarrow{f_{A,B,\rho_B}} \rho'_B = tr_A\left(\rho'_A \otimes \rho'_B\right) = tr_A\left[\frac{\sum_k M_{a,k}\,\rho_A \otimes \rho_B\,M^\dagger_{a,k}}{tr_{AB}\left(\sum_k M_{a,k}\,\rho_A \otimes \rho_B\,M^\dagger_{a,k}\right)}\right]$$

Sostituendo $\rho_B = \sum_j p_j \left|j\right\rangle_B \left\langle j\right|_B$ e indicando con $\{\left|\phi_i\right\rangle_A\}$ la base di $\mathcal{H}_A$:

$$= \frac{tr_A\left(\sum_{k,j} p_j M_{a,k} \left|j\right\rangle_B \rho_A \left\langle j\right|_B \ M^\dagger_{a,k}\right)}{tr_{AB}\left(\sum_{k,j} p_j M_{a,k} \left|j\right\rangle_B \rho_A \left\langle j\right|_B \ M^\dagger_{a,k}\right)} =$$

$$\frac{\sum_{k,j,i}\left(\sqrt{p_j}\left\langle\phi_i\right|_A \ M_{a,k}\left|j\right\rangle_B\right)\rho_A\left(\sqrt{p_j}\left\langle\phi_i\right|_A \ M_{a,k}\left|j\right\rangle_B\right)^\dagger}{tr_B\left[\sum_{k,j,i}\left(\sqrt{p_j}\left\langle\phi_i\right|_A \ M_{a,k}\left|j\right\rangle_B\right)\rho_A\left(\left\langle\phi_i\right|_A \ M_{a,k}\left|j\right\rangle_B\right)^\dagger\right]}$$

Introducendo gli operatori lineari limitati $N_{a,m} = \langle\phi_{i(m)}|_A \, M_{a,k(m)} \, |j(m)\rangle_B$ si ottiene quindi:

$$\rho'_B = \frac{\sum_m N_{a,m} \, \rho_A \, N^\dagger_{a,m}}{tr_B \left(\sum_m N_{a,m} \, \rho_A \, N^\dagger_{a,m}\right)} \qquad p_a = tr_B \left(\sum_m N_{a,m} \, \rho_A \, N^\dagger_{a,m}\right) \tag{2.19}$$

Si verifica quindi la completezza:

$$\sum_{a,m} N^\dagger_{a,m} N_{a,m} = \sum_{k,j,i} p_j \, \langle j|_B \, M^\dagger_{a,k} \, |\phi_i\rangle_A \, \langle\phi_i|_A \, M_{a,k} \, |j\rangle_B = \sum_{k,j} p_j \, \langle j|_B \, M^\dagger_{a,k} M_{a,k} \, |j\rangle_B$$

$$\sum_k p_j \, \langle j|_B \, \mathbf{1}_{\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B} \, |j\rangle_B = \mathbf{1}_A \, tr_B(\rho_B) = \mathbf{1}_A$$

Sufficienza. Sia $\{N_{a,m}\}$ uno strumento quantistico generalizzato. Per verificare l'implicazione è sufficiente verificare l'esistenza di una trasformazione f su $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ da cui esso è indotto. Indicate con $\{|\phi_i\rangle_A\}$ e $\{|\phi_i\rangle_B\}$ le basi di $\mathcal{H}_A$ e $\mathcal{H}_B$ ed eseguendo conti analoghi a quelli operati al punto precedente si verifica che una tale trasformazione esiste sempre ed è ad esempio data dalla trasformazione con associati gli operatori di Kraus $\{M_{a,k}\}$ aventi forma:

$$M_{a,k} = |\phi_{i(k)}\rangle_A \, N_{a,m(k)} \, \langle\phi_{j(k)}|_B$$

Struttura dei processi. Il fatto che le trasformazioni abbiamo struttura di processi segue dalla dimostrazione della proposizione 2.8 in quanto le relazioni rimangono valide anche per operatori di Kraus generalizzati (per trasformazioni con dominio e codominio componibili).

□

Corollario 2.15. *La meccanica quantistica ha una duplice struttura di categoria monoidale. La categoria con morfismi le operazioni quantistiche generalizzate sarà indicata con* **MQop***; la categoria con morfismi gli strumenti quantistici generalizzati sarà indicata con* **MQst***.*

Dimostrazione. Gli oggetti sono gli spazi di Hilbert, il prodotto monoidale è il prodotto tensoriale. L'unica parte non ovvia è dimostrare che le operazioni quantistiche generalizzate e gli strumenti quantistici generalizzati sono chiusi rispetto alla composizione al pari dei morfismi, ma ciò coincide con il teorema 2.14.

□

Il teorema 2.14 riassume l'intera formulazione operazionale. Il corollario 2.15 garantisce che effettivamente la meccanica quantistica sia trattabile con il formalismo grafico sviluppato al paragrafo precedente e pertanto i risultati che deriveremo successivamente nell'ambito delle teorie probabilistiche operazionali siano validi anche per essa.
Si conclude infine riportando un risultato che caratterizza in maniera astratta la nozione di trasformazione fra sistemi.

Teorema 2.16. *Siano* $\mathcal{H}_A$ *e* $\mathcal{H}_B$ *due spazi di Hilbert. Una trasformazioni da* $\mathcal{H}_A$ *in* $\mathcal{H}_B$ *è rapresentata da una famiglia di operatori* $\{M_{a,k}\}$ *se e solo è una mappa* $\mathcal{C}$ *dagli stati di* $\mathcal{H}_A$ *agli stati di* $\mathcal{H}_B$ *tale che:*

- *non aumenta la traccia,* $0 \leq tr\mathcal{C}(\rho_A) \leq 1$
- *è lineare per combinazioni convesse,* $\mathcal{C}\left(\sum_j p_j \rho_j = \sum_j p_j \mathcal{C}(\rho_j)\right)$
- *è completamente positiva,* $\mathcal{C} \otimes \mathcal{I}_C(\rho) \geq 0, \; \forall \, \mathcal{H}_C$

Dimostrazione. Omessa. [2] □

[2]Si veda [11], pag. 368, Teorema 8.1.

CAPITOLO 3

Teorie probabilistiche operazionali

Poste le fondamenta matematiche del linguaggio grafico e mostrata la naturalità con cui esso emerge nella descrizione delle teorie fisiche, si procede con l'utilizzo del formalismo introdotto nel capitolo 1 per la trattazione delle teorie probabilistiche operazionali estendendo la struttura di teoria operazionale della meccanica quantistica descritta nel capitolo 2.
Una teoria fisica presenta la struttura naturale di SSMC e la sua modellizzazione matematica presenta la struttura naturale di categoria monoidale simmetrica (queste due categorie, seppur distinte, ammettono una mappa che le identifica a meno di isomorfismi preservandone la struttura monoidale[1]). I risultati che sono ottenuti di seguito tramite l'utilizzo del formalismo grafico delle SSMC valgono quindi anche nell'ambito delle categorie monoidali simmetriche, ovvero valgono per qualsiasi struttura matematica che viene utilizzata per modellizzare concretamente una teoria. Si pone dunque la definizione seguente:

Definizione 3.1. Una *teoria* è una *categoria monoidale stretta simmetrica*. Gli oggetti della categoria corrispondono ai sistemi della teoria ed i morfismi corrispondono ai processi.

La definizione posta, pur essendo del tutto generale in quanto ogni teoria fisica ammette una naturale struttura di SSMC, non è funzionale in quanto non fa emergere la duplice struttura categoriale della meccanica quantistica (corollario 2.15) e la struttura probabilistica ad essa associata che le correla. All'interno della meccanica quantistica ogni trasformazione che mappa gli stati di un sistema $\mathcal{H}_A$ negli stati di un sistema $\mathcal{H}_B$ è descritta da un'opportuna operazione quantistica, ovvero da un morfismo $f_i \in \mathbf{MQop}(A, B)$, fa inoltre parte di strumenti quantistici, ovvero di morfismi $\{f_i\} \in \mathbf{MQst}(A, B)$, ed avviene con una probabilità p_a dipendente dallo stato iniziale ρ_A. Si pongono dunque le nozioni:

Definizione 3.2. Data una teoria $\mathbf{T}$, siano $A, B \in |\mathbf{T}|$. Si dice:

- *Evento di preparazione* di A un qualsiasi morfismo $f \in \mathbf{T}(I, A)$.
- *Evento di osservazione* di A un qualsiasi morfismo $f \in \mathbf{T}(A, I)$.

[1] Funtore monoidale simmetrico forte, si veda teorema A.9

- *Evento* da A in B un qualsiasi morfismo $f \in \mathbf{T}(A, B)$.

Definizione 3.3. Data una teoria $\mathbf{T}$, siano $A, B \in |\mathbf{T}|$. Si dice:
- *Test* da A in B una collezione di trasformazioni $\{f_i\}$ tali che $f_i \in \mathbf{T}(A, B)\ \forall\, i$.
- *Test di preparazione* su A un qualsiasi test $\{f_i\}$ da I in A.
- *Test di osservazione* su A un qualsiasi test $\{f_i\}$ da A in I.

Definizione 3.4. Una *teoria operazionale* $\mathbf{T}$ consiste di:
- Una teoria **Top**
- Una SSMC **Tst** tale che:
  1 $|\mathbf{Tst}| \equiv |\mathbf{Top}|$
  2 $\mathbf{Tst}(A, B) \subseteq \{\{f_i\} \mid \{f_i\} \text{ test, } f_i \in \mathbf{Top}(A, B)\ \forall\, i\}$

Osservazione 3.5. I test associati alle trasformazioni di una teoria hanno anch'essi struttura di SSMC se considerati assieme alla medesima famiglia di oggetti. Le operazioni di composizione e prodotto monoidale sono infatti canonicamente indotte analogamente a quanto mostrato nella proposizione 2.8. Operando una restrizione dei test non si ottiene però a priori una struttura di SSMC (in quanto non è detto valga la chiusura per composizione) ed è pertanto necessaria l'ipotesi esplicita. La possibilità di restrizione è infine giustificata dal semplice fatto che non tutti i test, ovvero non tutte le collezioni di morfismi all'interno di una teoria fisica, definiscono oggetti aventi significato all'interno della teoria (banalmente, il numero di operazioni quantistiche costituenti uno strumento quantistico dipende dalla dimensione dello spazio di Hilbert su cui è definito).

Imponendo l'esistenza di una legge in una teoria operazionale $\mathbf{T}$ che permetta, fissato un test fra due sistemi, di definire la probabilità che ognuna delle trasformazioni ad esso associate avvenga si ottiene la definizione:

Definizione 3.6. Una *teoria probabilistica operazionale* (operational probabilistic theory, OPT) $\mathbf{T}$ consiste di:

1 Una teoria operazionale $\mathbf{T}$

2 Posto $Conv([0,1]) := \{\{p_i\} \in \mathcal{P}([0,1]) \mid \sum_i p_i = 1\}$, una funzione T detta legge di probabilità della teoria $\mathbf{T}$ tale che:

- $T : \mathbf{Tst}(I, I) \to Conv([0,1]) :: \{f_i\} \to \{p_i\}$ ove

$$p_i = \textit{probabilità che avvenga la trasformazione i-esima}$$

- Se $T(\{f_i\}) = \{p_i\}$ e $T(\{g_j\}) = \{q_j\}$ allora

$$T(\{f_i \otimes g_j\}) = \{p_i q_j\} \quad \text{e} \quad T(\{f_i \circ g_j\}) = \{p_i q_j\}$$

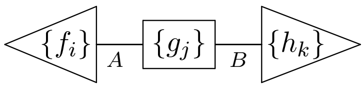
Notazione 3.7. Nelle ipotesi della definizione precedente, sia f_j una trasformazione da I in I. Nel caso in cui non vi sia ambiguità su quale sia il test $\{f_i\}$ a cui essa appartiene si pone, commettendo un abuso di notazione,

$$T(f_j) := p_j = \text{probabilità che avvenga la trasformazione } f_j$$

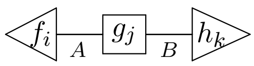
ove p_j è il j-esimo termine di $\{p_i\} = T(\{f_i\})$.

Dalla definizione 3.6 segue che tutte le trasformazioni dal sistema I in se stesso di un test hanno associata una probabilità di avvenire.

Esempio 3.8. Data $\mathbf{T}$ teoria probabilistica operazionale, sia $\{f_i\}$ un test di preparazione su A, $\{g_j\}$ un test da A in B e $\{h_k\}$ un test di osservazione su B, con $A, B \in |\mathbf{T}|$. Poichè $\{h_k g_j f_i\} = \{h_k\} \circ \{g_j\} \circ \{f_i\}$ è un test da I in I, sfruttando la definizione 1.9 si ottiene il diagramma:



e tramite la probabilità indotta dalla funzione T segue che la trasformazione $h_k g_j f_i$ da I in I e dunque il diagramma



hanno probabilità $T(h_k g_j f_i) = p_{ijk}$ di avvenire.

La legge di probabilità implica che, fissato un test $\{f_i\} \in \mathbf{Tst}(A, B)$ con A e B sistemi (non necessariamente distinti fra loro o diversi da I), è indotta una descrizione operatoriale delle trasformazioni f_i.

Definizione 3.9. Data $\mathbf{T}$ OPT, siano $A, B \in |\mathbf{T}|$ due sistemi e sia T la legge di probabilità della teoria. Sono dunque possibili le seguenti identificazioni:

- Dato $\{f_i\} \in \mathbf{Tst}(I, A)$ test di preparazione, ad ogni evento di preparazione f_i è possibile associare un funzionale $\hat{f}_i$ a valori reali, definito sugli eventi di osservazione, tale che, $\forall\, g_j \in \{g_j\}$, $\forall\, \{g_j\} \in \mathbf{Tst}(A, I)$ vale:

$$\hat{f}_i(g_j) = p_{i,j} \quad \text{ove} \quad p_{ij} = T(g_j f_i)$$

- Dato $\{g_i\} \in \mathbf{Tst}(A, I)$ test di osservazione, ad ogni evento di osservazione g_i è possibile associare una funzionale $\hat{g}_i$ a valori reali, definito sugli eventi di preparazione, tale che, $\forall\, f_j \in \{f_j\}$, $\forall\, \{f_j\} \in \mathbf{Tst}(I, A)$ vale:

$$\hat{g}_i(f_j) = p_{i,j} \quad \text{ove} \quad p_{ij} = T(g_i f_j)$$

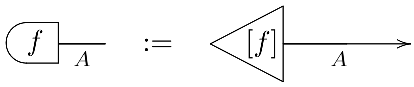
- Dato $\{h_k\} \in \mathbf{Tst}(A, B)$ test, ad ogni trasformazione h_k è possibile associare un operatore $\hat{h}_k : \mathbf{T}(I, A) \to \mathbf{T}(I, B)$ che mappa gli eventi di preparazione di A negli eventi di preparazione di B tale che, $\forall\, f_j \in \{f_j\}$, $\forall\, \{f_j\} \in \mathbf{Tst}(I, A)$ vale:

$$\hat{h}_k(f_j) = \widehat{h_k f_j}$$

Da un punto di vista puramente probabilistico non è possibile distinguere due eventi di preparazione con i medesimi esiti e la cui funzione associata assume i medesimi valori su tutto il dominio. Pertanto, sperimentalmente, due siffatti eventi devono essere assunti uguali, seppur dati da due processi differenti. Ciò equivale al richiedere di quozientare l'insieme degli eventi di preparazione tramite una relazione di equivalenza e, valendo considerazioni analoghe per gli eventi di osservazioni e gli eventi in generale[2], si modificano le definizioni 3.2 e 3.3 e i simboli della definizione 1.9 ponendo:

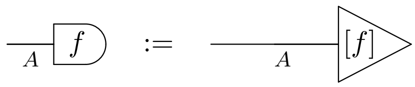
Definizione 3.10. Data una teoria $\mathbf{T}$, siano $A, B \in |\mathbf{T}|$. Si dice:

- *Stato* di A una qualsiasi classe di equivalenza di morfismi $[f] \in \frac{\mathbf{T}(I,A)}{\sim}$ e si indica col simbolo:



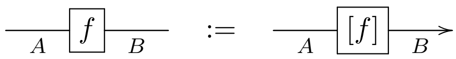
(3.1)

- *Effetto* di A una qualsiasi classe di equivalenza di morfismi $[f] \in \frac{\mathbf{T}(A,I)}{\sim}$ e si indica col simbolo:



(3.2)

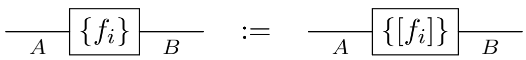
- *Trasformazione* di A in B una qualsiasi classe di equivalenza di morfismi $[f] \in \frac{\mathbf{T}(A,B)}{\sim}$ e si indica col simbolo:



(3.3)

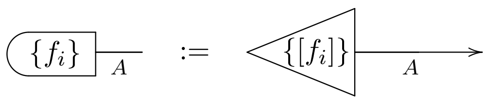
Definizione 3.11. Data una teoria $\mathbf{T}$, siano $A, B \in |\mathbf{T}|$. Si dice:

- *Test* da A in B una collezione di trasformazioni $\{[f_i]\} \in \frac{\mathbf{Tst}(A,B)}{\sim}$ e si indica col simbolo:



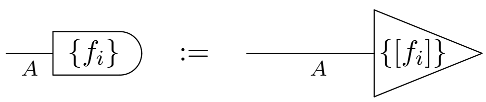
(3.4)

- *Test di preparazione* su A un qualsiasi test $\{[f_i]\} \in \frac{\mathbf{Tst}(I,A)}{\sim}$ e si indica col simbolo:



(3.5)

- *Test di osservazione* su A un qualsiasi test $\{[f_i]\} \in \frac{\mathbf{Tst}(A,I)}{\sim}$ e si indica col simbolo:



(3.6)

Notazione 3.12. Di seguito si omette di indicare le parentesi quadre che indicano la classe di equivalenza e il quozientamento dell'insieme dei processi e dei test.

[2]Per quanto riguarda eventi di preparazione ed osservazione la relazione di equivalenza è la medesima ed è banalmente $f \sim g \iff \hat{f} = \hat{g}$; per quanto riguarda eventi in generale la condizione diviene $f \sim g \iff \hat{f} \otimes 1_C = \hat{g} \otimes 1_C \ \ \forall\, C$ in quanto altrimenti si può portare un controesempio tramite spazi di Hilbert reali che prova la distinguibilità, in seguito ad estensioni dello spazio di Hilbert di partenza, di un evento non distinguibile localmente. Si veda [18].

Esempio 3.13. Le trasformazioni fra i sistemi A e B (non necessariamente distinti da I) corrispondono, nell'ambito della formulazione operazionale della meccanica quantistica, agli elementi di $\mathbf{MQop}(A,B)$, ovvero alle operazioni quantistiche da $\mathcal{H}_A$ ad $\mathcal{H}_B$. Gli stati e gli effetti di un sistema A corrispondo quindi, rispettivamente, alle operazione quantistiche da $\mathcal{H}_I$ ad $\mathcal{H}_A$ ed alle operazioni quantistiche da $\mathcal{H}_A$ ad $\mathcal{H}_I$. L'identificazione di tali definizioni con quelle canoniche (ove, in particolare, gli stati sono operatori densità e gli effetti sono operatori positivi) è garantita dalla caratterizzazione operatoriale che segue:

- Ad uno stato h_k di un sistema A, che corrisponde, nell'ambito della formulazione operazionale della meccanica quantistica, ad un'operazione quantistica generalizzata $\{N_{k,m}\}$ fra gli spazi di Hilbert $\mathcal{H}_I$ e $\mathcal{H}_A$, è associato il funzionale $\widehat{h_k}(\cdot) = tr\left[\sum_m N_{k,m}\mathbf{1_I}N^\dagger_{k,m}(\cdot)\right]$ definito sugli effetti di A. Ponendo $\rho_A = \frac{\sum_m N_{k,m}\mathbf{1_I}N^\dagger_{k,m}}{tr\left(\sum_m N^\dagger_{k,m}N_{k,m}\right)}$ operatore densità, segue che $\widehat{h_k} = p_k tr[\rho_A(\cdot)]$, con $p_k = tr\left(\sum_m N^\dagger_{k,m}N_{k,m}\right)$. Dunque uno stato nell'ambito del formalismo delle OPT coincide con il funzionale lineare ottenuto tramite l'operazione di traccia ed un opportuno ρ_A, stato secondo la definizione canonica. Esso soddisfa infatti:

  1 E' un operatore positivo: $\rho_A \geq 0$
  2 Ha traccia unitaria: $tr\rho_A = 1$
  3 E' un operatore hermitiano: $\rho_A = \rho_A^\dagger$

  In particolare, un test di preparazione è un insieme di stati quantistici insieme alle loro probabilità.

- Ad uno effetto g_j di un sistema A, che corrisponde, nell'ambito della formulazione operazionale della meccanica quantistica, ad un'operazione quantistica generalizzata $\{N_{j,m}\}$ fra gli spazi di Hilbert $\mathcal{H}_A$ e $\mathcal{H}_I$, è associato il funzionale $\widehat{g_j}(\cdot) = tr\left[\sum_m N_{j,m}(\cdot)N^\dagger_{j,m}\right] = tr[\sum_k N^\dagger_{j,m}N_{j,m}(\cdot)]$ definito sugli stati di A. Ponendo $E_j = \sum_m N_{j,m}\mathbf{1_I}N^\dagger_{j,m}$ operatore positivo, segue che $\widehat{g_j} = tr[E_j(\cdot)]$. Dunque un effetto nell'ambito del formalismo delle OPT coincide con il funzionale lineare ottenuto tramite l'operazione di traccia ed un opprtuno E, effetto secondo la definizione canonica.

- Ad una trasformazione f_i fra i sistemi A e B, che corrisponde, nell'ambito della formulazione operazionale della meccanica quantistica, ad un'operazione quantistica generalizzata $\{N_{i,m}\}$ fra gli spazi di Hilbert $\mathcal{H}_A$ e $\mathcal{H}_B$, è associato l'operatore $\widehat{f_i}(\cdot) = \frac{\sum_m N_{i,m}(\cdot)N^\dagger_{i,m}}{tr_B\left(\sum_m N^\dagger_{i,m}N_{i,m}(\cdot)\right)}$ definito sugli stati di A a valori negli stati di B.

CAPITOLO 4

Causalità

Le trasformazioni ed i test di una OPT possono essere concatenati in maniera sequenziale essendo per costruzione dotati di un'operazione di composizione. L'ordinamento associato a tale concatenazione non si è però mai assunto esser legato in alcun modo ad una struttura causale, la quale pertanto è a priori non definita. Essa può però essere implementata richiedendo semplicemente che la probabilità che un sistema si trovi in un particolare stato successivamente ad un test di preparazione sia indipendente dal test di osservazione che viene applicato.

Definizione 4.1. Sia $\mathbf{T}$ una OPT. $\mathbf{T}$ è detta *causale* se $\forall\, A \in |\mathbf{T}|, \forall \{f_i\} \in \mathbf{Tst}(I, A)$ test di preparazione, $\forall \{g_j\}, \{h_k\} \in \mathbf{Tst}(A, I)$ test di osservazione, le *probabilità marginali* p_i degli stati f_i sono indipendenti dalla scelta del test di osservazione, ovvero se vale

$$p_i \equiv p(f_i) := \sum_j T(g_j f_i) = \sum_k T(h_k f_i) \quad \forall\, i \tag{4.1}$$

Osservazione 4.2. L'equazione 4.1 implica che le probabilità marginali degli stati di un test di preparazione sono univocamente definite poichè indipendenti dalla scelta del test di osservazione particolare su cui sono calcolate.

Si introducono ora la nozione di *test deterministico* e di *coarse-graining* di un test.

Definizione 4.3. Data $\mathbf{T}$ OPT, siano $A, B \in |\mathbf{T}|$ due sistemi e $\{f_i\} \in \mathbf{Tst}(A, B)$ un test. $\{f_i\}$ è detto *test deterministico* se è composto da un'unica trasformazione che è quindi detta *trasformazione deterministica*.

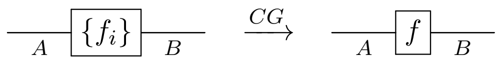
Definizione 4.4. Data $\mathbf{T}$ OPT, siano $A, B \in |\mathbf{T}|$ due sistemi e $\{f_i\} \in \mathbf{Tst}(A, B)$ un test. Si definisce *coarse-graining* di $\{f_i\}$ il test deterministico $\{f\} \in \mathbf{Tst}(A, B)$, se esiste, tale che $\forall\, \{g_j\} \in \mathbf{Tst}(I, A)$ test di osservazione:

$$\hat{f}(g_j) = \sum_i \hat{f}_i(g_j) \qquad \forall g_j \in \{g_j\} \tag{4.2}$$

Assunzione 1. *In generale non è garantito che* $\mathbf{T}$ *sia chiusa sotto l'operazione di coarse-graining. Nella trattazione successiva si assumerà quindi la chiusura della teoria rispetto a combinazioni convesse di trasformazioni, ovvero* $\forall\, A, B \in |\mathbf{T}|$*:*

- *se* $f, g \in \mathbf{Top}(A, B)$ *e* $\{f_i\} \in \mathbf{Tst}(A, B)$ *allora si richiede che* $af + bg \in \mathbf{Top}(A, B)$ *con* $a + b = 1$*;*
- *se* $\{f_i\} \in \mathbf{Tst}(A, B)$ *e* $\{G_j\}$ *è una partizione delle trasformazioni* f_i *allora posto* $\hat{g}_j := \sum_{f_i \in G_j} \hat{f}_i$ *si richiede che* $\{g_j\} \in \mathbf{Tst}(A, B)$.

Notazione 4.5. Nelle ipotesi della definizione 4.4 il passaggio da un test al suo coarse-graning è rappresentato dalla sostituzione:



Tramite la definizione 4.4 è possibile caratterizzare la definizione 4.1

Proposizione 4.6. *Sia* $\mathbf{T}$ *una OPT.* $\mathbf{T}$ *è causale se e solo se* $\forall\ A \in |\mathbf{T}|$ *esiste un unico test di osservazione deterministico* $\{e_A\} \in \mathbf{Tst}(A, I)$*.* e_A *è quindi detto effetto deterministico del sistema* A*.*

Dimostrazione. Necessità. Sia $\mathbf{T}$ causale e si supponga per assurdo che per il sistema A vi siano due effetti deterministici distinti $e_A, e'_A \in \mathbf{Top}(A, I)$. Sia $\{f_i\} \in \mathbf{Tst}(I, A)$ un test di preparazione su A. Dall'equazione 4.1 segue che

$$\widehat{e_A}(f_i) = T(e_A f_i) = p_i = T(e'_A f_i) = \widehat{e'_A}(f_i) \quad \forall f_i \in \{f_i\}$$

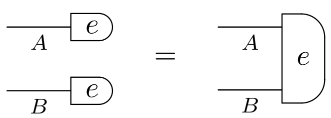
dunque $\widehat{e_A} \equiv \widehat{e'_A}$. Valendo la definizione 3.10 segue che $e_A = e'_A$. Assurdo.
Sufficienza. Sia e_A l'unico effetto deterministico del sistema A. Siano $\{g_j\}, \{h_k\} \in \mathbf{T}(A, I)$ test di osservazione e $\{f_i\} \in \mathbf{T}(I, A)$ un test di preparazione. Poichè i coarse-graning di $\{g_j\}$ e $\{h_k\}$ sono per costruzione un effetto deterministico vale che $\hat{g} = \widehat{e_A} = \hat{h}$ e pertanto

$$\sum_j T(g_j f_i) = \sum_j \hat{g}_j(f_i) = \hat{g}(f_i) = \widehat{e_A}(f_i) = \hat{h}(f_i) = \sum_k \hat{g}_j(f_i) = \sum_k T(h_k f_i) \quad \forall f_i \in \{f_i\}$$

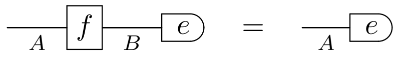
Dal confronto con l'equazione 4.1 segue la causalità di $\mathbf{T}$. $\square$

Corollario 4.7. *Data* $\mathbf{T}$ *OPT causale, siano* $A, B \in |\mathbf{T}|$ *due sistemi con effetti deterministici* e_A *ed* e_B *e sia* $\{f\} \in \mathbf{Tst}(A, B)$ *un test deterministico. Allora*

- *l'effetto deterministico sul sistema accorpato* $AB = A \otimes B$ *è dato dall'accorpamento degli effetti deterministici su* A *e* B*, graficamente:*



- *la composizione di un test deterministico da A in B con l'effetto deterministico su B è dato dall'effetto deterministico su A, graficamente:*



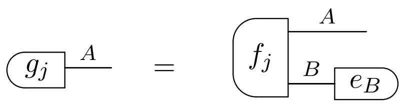
Dimostrazione. Entrambi i risultati seguono dall'unicità dell'effetto deterministico per un sistema fissato (proposizione 4.6) unita all'osservazione che il concatenamento e la composizione di trasformazioni deterministiche è una trasformazione deterministica. $\square$

Sfruttando la proposizione 4.6 è possibile definire la versione astratta dell'operazione di traccia parziale nell'ambito di una teoria probabilistica operazionale causale.

Definizione 4.8. Data $\mathbf{T}$ OPT causale, siano $AB \in |\mathbf{T}|$ un sistema bipartito e $\{f_i\} \in \mathbf{Tst}(I, AB)$ un test di preparazione di AB. E' detto *test di preparazione marginalizzato* di A il test di preparazione $\{g_j\} \in \mathbf{Tst}(I, A)$ tale che $\forall\ \{h_k\} \in \mathbf{Tst}(A, I)$:

$$\widehat{g_j}(h_k) = \widehat{(\mathbf{1_A} \otimes e_B) \circ f_j}(h_k)$$

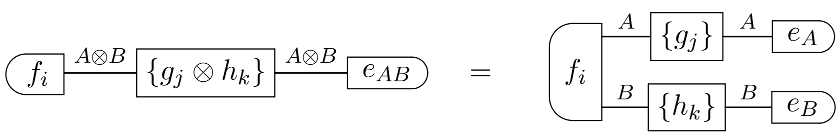
Graficamente



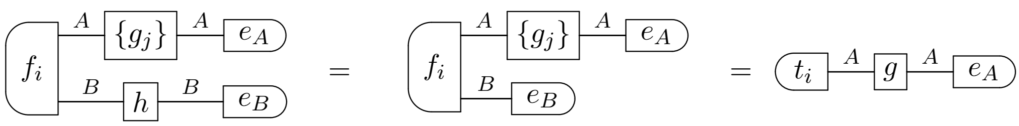
Con le nozioni introdotte è quindi possibile dimostrare un primo importante risultato. Vale la versione astratta del teorema di *no signalling* della meccanica quantistica.

Teorema 4.9. *Se $\mathbf{T}$ è una teoria probabilistica operazionale causale allora è impossibile avere uno scambio di informazioni non locale, ovvero gli esiti di misure locali su sottosistemi distinti di un sistema bipartito non sono correlabili avendo accesso ad un solo sottosistema.*

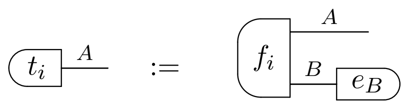
Dimostrazione. Siano $A, B \in |\mathbf{T}|$ due sistemi e $\{f_i\} \in \mathbf{Tst}(I, AB)$ un test di preparazione su AB. Le misure locali sono date in generale da trasformazioni definite dal sistema in se stesso, pertanto siano $\{g_j\} \in \mathbf{Tst}(A, A)$ e $\{h_k\} \in \mathbf{Tst}(B, B)$ misure locali. Il teorema equivale a dimostrare che le probabilità degli esiti di $\{g_j\}$ su A sono indipendenti dagli esiti di $\{h_k\}$ su B.
L'esecuzione di due misure locali equivale all'esecuzione di una misura $\{g_j \otimes h_k\}$ su AB. Segue che:



Applicando nell'ordine la definizione 4.4, il corollario 4.7 e la definizione 4.8 segue che



ove t_i è lo stato marginalizzato di A ed è pertanto definito come



□

Osservazione 4.10. Anche se all'interno del capitolo 4 sono state introdotte molte definizioni e proposizioni il teorema 4.9 necessità di una sola ipotesi, ovvero che la teoria $\mathbf{T}$ sia una OPT causale.

Si procede ora con l'introduzione di una nozione di norma operazionale sugli stati la quale sarà funzionale alla verifica del fatto che la meccanica quantistica nella formulazione operazionale, non solo è una OPT ma possiede esattamente la struttura causale specificata nella definizione 4.1.

Notazione 4.11. Data $\mathbf{T}$ OPT, siano $A \in |\mathbf{T}|$ un sistema, $\{f_i\} \in \mathbf{Tst}(I, A)$ un test di preparazione e $\{g_j\} \in \mathbf{Tst}(A, I)$ un test di osservazione. Si introduce quindi la notazione di Dirac generalizzata

$$(g_j|f_i) \;:=\; T(g_j f_i)$$

Definizione 4.12. Data $\mathbf{T}$ OPT, siano $A \in |\mathbf{T}|$ un sistema e $\{f_i\} \in \mathbf{Tst}(I, A)$ un test di preparazione. Si definisce la norma $\|\cdot\|$ di uno stato tramite la relazione

$$\|f_i\| := (e_A|f_i)$$

con e_A effetto deterministico.

Osservazione 4.13. Dalla definizione 3.6 segue che $\forall$ A $\in |\mathbf{T}|$, $\forall\ f\ \in \mathbf{Top}(I, A)$ vale $0 \leq \|f\| \leq 1$. In particolare $\|f\| = 1$ se e solo se f è uno stato deterministico.

Remark 4.14. La norma di uno stato f_i così come l'operatore $\widehat{f_i}$ ad esso associato dipendono dal test di preparazione $\{f_i\}$ considerato.

Vale quindi la proposizione

Proposizione 4.15. *Sia* $\mathbf{T}$ *una OPT. Se ogni stato della teoria è proporzionale ad uno stato deterministico allora* $\mathbf{T}$ *è causale.*

Dimostrazione. La proposizione equivale a dimostrare che se $\forall\ A \in |\mathbf{T}|$ e $\forall\ f \in \mathbf{Top}(I, A)$ stato $\exists\ \{f\} \in \mathbf{Tst}(I, A)$ test deterministico, allora la teoria è causale.
Si supponga per assurdo che esistano due effetti deterministici distinti e_A ed e'_A e sia $\{f_i\} \in \mathbf{Tst}(I, A)$ un test di preparazione. Per ipotesi $\forall\ f_i \in \{f_i\}\ \ \exists\ \{g\}$ stato deterministico con $\hat{f_i} = k\hat{g}$. Sfruttando l'osservazione 4.13 si ottengono le relazioni:

$$(e_A|f_i) = \hat{f}_i(e_A) = k\hat{g}(e_A) = k = k\hat{g}(e'_A) = \hat{f}(e'_A) = \big(e'_A|f_i\big)$$

da cui

$$\widehat{e_A}(f_i) = (e_A|f_i) = \big(e'_A|f_i\big) = \widehat{e'_A}(f_i) \quad \forall f_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad \widehat{e_A} = \widehat{e'_A}$$

Segue che $e_A = e'_A$ per la definizione 3.10 e quindi la teoria $\mathbf{T}$ è causale per la proposizione 4.6. □

Osservazione 4.16. Nell'ambito della meccanica quantistica è sempre possibile descrivere lo stato di un sistema A ottenuto tramite un test di preparazione con esito ρ_A come uno stato deterministico $\rho'_A = k\rho_A$. E' infatti sufficente rinormalizzare la traccia dell'operatore densità ρ_A ponendo $\rho'_A = \frac{\rho_A}{tr_A \rho_A}$. Dalla proposizione 4.15 segue che la meccanica quantistica è causale nel senso della definizione 4.1.

Assunzione 2. *Ogni stato è proporzionale ad uno stato deterministico, ovvero* $\forall\ f \in$ $\mathbf{Top}(I, A)$ *stato deterministico* $\exists\ \{f\} \in \mathbf{Tst}(I, A)$ *test di preparazione deterministico.*

Si conclude quindi con alcune considerazioni. La presenza di una struttura causale all'interno di una teoria è da ritenersi un requisito essenziale ed imprescindibile di qualsiasi teoria fisica. Pertanto, seppur la richiesta di un postulato che la garantisce riduca la classe delle teorie descrivibili dal formalismo (la causalità, come osservato ad inizio paragrafo, non è infatti già implementata nella nozione di OPT), non viene difatto estromessa alcuna teoria fisica. L'esplicitazione formale di cosa si intenda per teoria avente struttura causale non è però a priori banale e immediata. La definizione di teoria causale assunta (definizione 4.1) è in ogni caso una buona definizione ai fini della presente trattazione in quanto descrive una classe di teorie probabilistiche operazionali che include la meccanica quantistica (osservazione 4.16).
Per la classe di teorie a cui ci si è ristretti si è dimostrato un primo importante risultato che non sia una ovvia conseguenza delle definizioni poste, ovvero il teorema di no signalling (teorema 4.9). In particolare tale risultato pone in stretta correlazione alcuni aspetti della meccanica quantistica quali:

$$Normalizzazione\ stati \quad \Rightarrow \quad Causalità \quad \Rightarrow \quad Località\ informazione$$

Tale catena di implicazioni è di particolare rilevanza nella contestualizzazione del fenomeno dell'entanglement: nel caso in cui tramite esso fosse possibile una trasmissione di informazione non locale o comunicazioni quali quelle dell'*Everett phone paradox*[1] non solo si avrebbe un fenomeno non contemplato dalla teoria ma verrebbe meno la stessa consistenza interna di quest'ultima.

[1]Legato all'interpretazione a molti mondi della meccanica quantistica, coincide con la possibilità di trasmettere informazioni fra mondi distinti.

CAPITOLO 5

Purezza nelle OPT

Definito il formalismo delle OPT si procede con la caratterizzazione delle nozioni di stato puro e stato misto e si introducono gli assiomi minimi necessari ad identificare la classe di teorie presentanti le principali peculiarità che contraddistinguono la meccanica quantistica. Fulcro del seguente capitolo è la possibilità di purificare lo stato di un sistema indipendentemente dalla sua purezza, semplicemente estendendo opportunamente il sistema considerato. Tale possibilità, presente nella meccanica quantistica come teorema e non valida nell'ambito della meccanica classica, verrà implementata come assioma. Nello specifico, nel primo paragrafo si formalizzerà la nozione di stato puro; nel secondo paragrafo si introdurranno alcune definizioni tecniche e si formalizzerà il concetto di purificazione di uno stato; nel terzo paragrafo si deriveranno le principali implicazioni dell'assunzione del principio di purificazione.
Nella trattazione seguente si assume che ogni teoria $\mathbf{T}$ considerata sia una teoria probabilistica operazionale causale che soddisfa l'assunzione 1.

5.1 Stati puri

In primo luogo si introduce la nozione di raffinamento di una trasformazione e di raffinamento banale:

Definizione 5.1. Data $\mathbf{T}$ teoria, siano $A, B \in |\mathbf{T}|$ due sistemi e $\{f_i\}, \{g_j\} \in \mathbf{Tst}(A, B)$ dei test. Il test $\{g_j\}$ è detto *raffinamento* del test $\{f_i\}$. Se esiste una partizione $\{G_i\}$ delle trasformazioni $\{g_j\}$ tale per cui

$$\hat{f}_i = \sum_{g_j \in G_i} \hat{g}_j$$

Definizione 5.2. Data $\mathbf{T}$ teoria, siano $A, B \in |\mathbf{T}|$ due sistemi e $\{f_i\} \in \mathbf{Tst}(A, B)$ un test. Un raffinamento $\{g_j\}$ del test $\{f_i\}$ è detto *banale* per la trasformazione f_i se $\forall g_j \in G_i,\ \hat{g}_j = \lambda_j \hat{f}_i$ con $\{\lambda_j\}_{g_j \in G_i} \in Conv(\,(0, 1]\,)$.

La definizione di purezza si pone quindi come la possibilità di una trasformazione, e quindi di uno stato, di essere o meno raffinata tramite un raffinamento non banale

Definizione 5.3. Data $\mathbf{T}$ teoria, siano $A, B \in |\mathbf{T}|$ due sistemi e $\{f_i\} \in \mathbf{Tst}(A,B)$ un test. Una trasformazione f_i è detta pura se il test $\{f_i\}$ ammette solo raffinamenti banali per f_i. Una trasformazione non pura è detta *mista*.

La definizione è compatibile con quella data in meccanica quantistica e gode di proprietà analoghe, quali per esempio la conservazione della purezza sotto l'azione di trasformazioni deterministiche reversibili.

Definizione 5.4. Data $\mathbf{T}$ teoria, siano $A, B \in |\mathbf{T}|$ due sistemi e $\{f\} \in \mathbf{Tst}(A,B)$ un test deterministico. $\{f\}$ è detto *reversibile* se $\exists\ \{g\} \in \mathbf{Tst}(B,A)$ tale che $g \circ f = \mathbf{1}_A$ e $f \circ g = \mathbf{1}_B$. $\{g\}$ è detto l'inverso di $\{f\}$ e sarà indicata con $\{f^{-1}\}$.

Proposizione 5.5. *Data $\mathbf{T}$ teoria, siano $A, B \in |\mathbf{T}|$ due sistemi, $\{g\} \in \mathbf{Tst}(A,B)$ un test deterministico reversibile, $\{f_i\} \in \mathbf{Tst}(I,A)$ un test di preparazione. Lo stato $f_i \in \mathbf{Top}(I,A)$ è puro se e solo se è puro lo stato $gf_i \in \mathbf{Top}(I,B)$.*

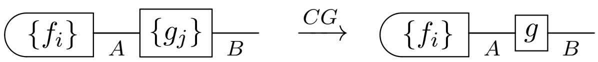
Dimostrazione. Necessità. Supponendo per assurdo che gf_i non sia puro segue che esso deve ammettere un raffinamento non banale $\{h_k^{(i)}\}$ tale che $\widehat{gf}_i = \sum_k \hat{h}_k^{(i)}$. Applicando ad ambo i membri $\{g^{-1}\}$ si ottiene: $\widehat{g^{-1}gf}_i = \hat{f}_i = \sum_k \widehat{g^{-1}h_k^{(i)}}$. Segue che $\{g^{-1}h_k^{(i)}\}$ è un raffinamento non banale di f_i, il che è assurdo poichè per ipotesi f_i è uno stato puro.
Sufficienza. Segue dalla necessità invertendo i ruoli di f_i e gf_i.

□

Segue inoltre in maniera naturale la caratterizzazione del comportamento dell'operazione di coarse-graining rispetto alla conservazione della purezza.

Osservazione 5.6. Dato un test $\{f_i\}$, dalla definizione 4.4 segue che il suo coarse-graining $\{f\}$ in generale non è uno stato puro in quanto $\{f_i\}$ è un suo raffinamento.

Osservazione 5.7. Nell'ambito del formalismo delle OPT la sostituzione di una trasformazione col suo coarse-graning è legittima nella misura in cui si valutano i diagrammi come semplici proposizioni probabilistiche ed il coarse-graining come una semplice marginalizzazione rispetto all'esito di un test. Infatti, sfruttando la definizione 4.4, dalla relazione fra diagrammi



segue la relazione fra le probabilità marginali $\sum_j p_{i,j} = p_i$.
Vi è però una delicata questione riguardante la determinazione dello stato del sistema nel procedere con la manipolazione di un diagramma. Applicando la definizione 3.10 segue che:

- Lo stato del sistema successivamente all'esecuzione dei test riportati nel primo diagramma è un elemento della famiglia $\{g_j f_i\}$.
- Lo stato del sistema successivamente all'esecuzione dei test riportati nel secondo diagramma è un elemento della famiglia $\{gf_i\}$.

Pertanto, osservando i risultati per un valore fissato dell'indice i, un insieme di sistemi omogenei con stati omogenei[1], nel primo caso viene mandato in un insieme di sistemi

[1]Un insieme di sistemi/stati in questo contesto è detto omogeneo, in accordo con la nomenclatura riportata in [7], se è composto da sistemi/stati identici.

omogenei con stati disomogenei; nel secondo caso viene mandato in un insieme di sistemi omogenei con stati omogenei (corrispondenti alle miscele statistiche degli stati disomogenei del primo caso). Segue che, per l'osservazione 5.6, da un diagramma in cui gli stati sono puri si ottiene, tramite operazioni di coarse-graining, un diagramma con i medesimi spettri di probabilità ma in cui gli stati sono misti.

Si indaga infine se si preservi o meno la purezza sotto operazioni di composizione ed accorpamento di processi puri. Non essendovi risultati esplicitamente deducibili dalla definizione 5.3 si pone l'assioma:

Assioma OPT 1. *La composizione e l'accorpamento di trasformazioni pure è una trasformazione pura.*

Tale assioma come la richiestà di causalità riduce la classe di teorie descrivibili dal formalismo. A differenza dell'imposizione di quest'ultima non è noto a priori se vengano trascurate teorie rilevanti ma poichè sia la meccanica quantistica che la meccanica classica lo soddisfano può essere assunto con sufficiente grado di confidenza.

Esempio 5.8. Nell'ambito della formulazione operazionale della meccanica quantistica sono trasformazioni pure quelle rappresentate da uno strumento quantistico costituito da un unico operatore di Kraus $\{A_{m,k}\} = \{A\}$. Tale operatore, se composto con uno analogo $\{B_{n,l}\} = \{B\}$, per la proposizione 2.8, originerebbe ancora uno strumento quantistico composto da un singolo operatore di Kraus $\{BA\}$:

$$\rho \to A\,\rho\,A^\dagger = \rho' \quad \rho' \to B\,\rho'\,B^\dagger = \rho'' \quad \rho \to (BA)\,\rho\,(BA)^\dagger = \rho''$$

Osservazione 5.9. Nel caso in cui tale assioma fosse negato si potrebbro però incorrere in alcuni fenomeni patologici. Si consideri il seguente esperimento mentale[2].
Sia $\mathbf{T}$ una teoria e si supponga che l'assioma 1 non valga. Allora esiste $A \in |\mathbf{T}|$ sistema e due trasformazioni pure $\{f_i\} \in \mathbf{Tst}(A,B)$ e $\{g_j\} \in \mathbf{Tst}(B,C)$ la cui composizione $\{h_k\} = \{g_j f_i\} \in \mathbf{Tst}(A,C)$ non lo è. Tramite diagrammi la situazione sarebbe:
La non purezza di $\{h_k\}$ implicherebbe allora che, se i tre strumenti quantistici fossero applicati da 3 osservatori distinti (nell'ordine A,B e C), si otterrebbe che la configurazione in cui A e B conoscono ognuno l'esito del proprio strumento e C conosce l'esito di entrambi gli strumenti (essendogli noto l'esito dello strumento composto $\{h_k\}$) sarebbero distinti. In particolare, nel secondo caso vi sarebbe "una mancanza di informazione". Poichè la conoscenza sugli esiti dei singoli esperimenti di C è massimale, essendo la medesima di A e B, la mancanza di informazione può essere giustificata unicamente come dovuta alla mancanza di conoscenza su come gli strumenti interagiscano nel momento in cui sono eseguiti in successione. In tal caso, come fatto notare nell'esperimento mentale originale, si avrebbe però la presenza di una sorta di interazione *non locale nel tempo*, la quale non è assolutamente contemplata nell'ambito della meccanica quantistica.

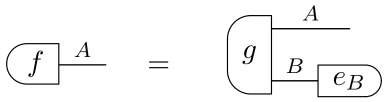
5.2 Postulato di purificazione

Si procede ora riducendo la classe di teorie descritte dal formalismo, selezionando quelle che presentano i comportamenti peculiari della meccanica quantistica, richiedendo tramite assioma che valga l'analogo astratto del teorema di purificazione della meccanica

[2] L'esperimento è rielaborato a partire da quello presentato in [6], pg. 24.

quantistica. Tale scelta è dovuta al fatto che esso rappresenta la principale differenza fra gli stati puri di sistemi bipartiti della meccanica classica (che possono essere ottenuti unicamente come prodotto di stati puri) e quelli della meccanica quantistica (che possono essere ottenuti come entanglement di stati misti) e conferisce un ruolo centrale al fenomeno dell'entanglement.

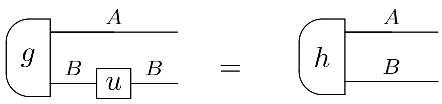
Definizione 5.10. Data $\mathbf{T}$ teoria, siano $A, B \in |\mathbf{T}|$ due sistemi e $\{f\} \in \mathbf{Tst}(I, A)$ uno stato deterministico. Uno stato puro deterministico g con $\{g\} \in \mathbf{Tst}(I, AB)$ è detto *purificazione* di f se f coincide con il suo stato marginale su A, ovvero se vale tramite diagrammi la relazione:



Il sistema B è quindi detto *sistema purificante.*

Assioma OPT 2. *Ogni stato deterministico ammette una purificazione unica a meno di trasformazioni deterministiche reversibili sul sistema purificante.*

Osservazione 5.11. In termini più formali l'assioma 2 può essere formulato in modo seguente. Data $\mathbf{T}$ teoria, siano $A \in |\mathbf{T}|$ sistemi e $\{f\} \in \mathbf{Tst}(I, A)$ stati deterministico, $\{g\}, \{h\} \in \mathbf{Tst}(I, CB)$ due purificazioni di $\{f\}$ con $B \in |\mathbf{T}|$ sistema purificante. Allora deve esistere $\{u\} \in \mathbf{Tst}(B, B)$ trasformazione deterministica reversibile tale che



Nella trattazione successiva si considereranno solamente teorie che soddisfano l'assioma 1 e l'assioma 2. Si introducono ora alcune definizioni tecniche che saranno necessarie per la dimostrazione dei risultati del paragrafo successivo. Innanzitutto si definisce e caratterizza lo *stato completamente misto*

Definizione 5.12. Data $\mathbf{T}$ teoria, sia $A \in |\mathbf{T}|$ sistema e $\{f\} \in \mathbf{Tst}(I, A)$ uno stato deterministico. f è detto *stato completatmente misto* se $\forall\ g \in \mathbf{Top}(I, A)$ stato $\exists\ h \in \mathbf{Top}(I, A)$ tale che $\hat{f} = a\hat{g} + b\hat{h}$ con $a, b \in (0, 1]$, ovvero se g può essere sempre completato per ottenere un raffinamento di f.

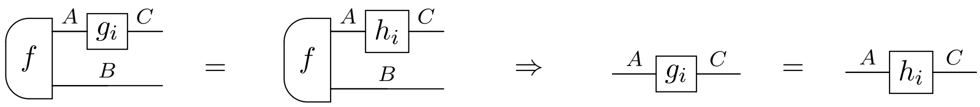
Osservazione 5.13. Uno stato deterministico f è completamente misto se e solo se l'insieme degli stati che possono essere completati in un raffinamento di f coincide con l'intero insieme di stati $\mathbf{Top}(I, A)$.

Gli stati completamente misti esistono in meccanica quantistica. Sono stati completamente misti tutti gli operatori densità con rango massimo. Si assume quindi che in tutte le teorie considerate tali stati esistano.

Assunzione 3. *Le teorie $\mathbf{T}$ considerate ammettono $\forall\ A \in |\mathbf{T}|$ l'esistenza di uno stato completamente misto.*

Si procede quindi con la definizione dei *faithful states.*

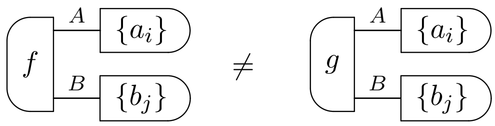
Definizione 5.14. Data $\mathbf{T}$ teoria, siano $A, B, C \in |\mathbf{T}|$ sistemi e $\{f\} \in \mathbf{Tst}(I, AB)$ uno stato deterministico. Lo stato $\{f\}$ è detto *faithful* per un sistema A se $\forall \ \{g_i\}, \{h_i\} \in \mathbf{Tst}(A, C)$ test vale l'implicazione



L'esistenza dei faithful states può essere dedotta a partire dall'assunzione 3 accettando di restringere la classe di teorie descritte dal formalismo imponendo che le teorie considerate sosddisfino l'assioma:

Assioma OPT 3. *Se due stati di un sistema bibartito sono differenti allora deve esistere almeno un test prodotto di test locali che presenti differenti spettri probabilistici.*

Osservazione 5.15. In termini più formali l'assioma 3 può essere formulato in modo seguente. Data $\mathbf{T}$ teoria, siano $A, B \in |\mathbf{T}|$ sistemi e $\{f\}, \{g\} \in \mathbf{Tst}(I, AB)$ stati deterministici distinti. Allora devono esistere $\{a_i\} \in \mathbf{Tst}(A, I)$ e $\{b_j\} \in \mathbf{Tst}(B, I)$ tali che



Nella trattazione seguente si considereranno solamente teorie in cui vale l'assioma 3. Vale quindi la caratterizzazione dei faithful state:

Proposizione 5.16. *Data* $\mathbf{T}$ *teoria, sia* $A \in |\mathbf{T}|$ *sistema e* $\{f\} \in \mathbf{Tst}(I, AB)$ *stato deterministico puro. Allora* $\{f\}$ *è uno stato faithful se e solo se lo stato marginale su* A *ad esso associato è uno stato completamente misto.*

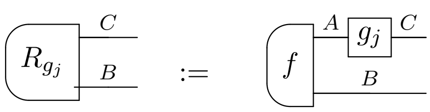
Dimostrazione. Omessa[3]. □

Corollario 5.17. *Sia* $\mathbf{T}$ *una teoria.* $\forall A, B \in |\mathbf{T}|$ *sistemi* $\exists \ \{f\} \in \mathbf{Tst}(I, AB)$ *stato puro deterministico faithful per il sistema* A.

Dimostrazione. Il risultato è una diretta conseguenza dell'assunzione 3 unita alla proposizione 5.16. □

Si definisce infine lo stato di Choi

Definizione 5.18. Data $\mathbf{T}$ teoria, siano $A, B, C \in |\mathbf{T}|$ sistemi, $\{f\} \in \mathbf{Tst}(I, AB)$ stato puro faithful per il sistema A, $\{g_j\} \in \mathbf{Tst}(A, C)$ test. Lo stato $R_{g_j} \in \{R_{g_j}\} \in \mathbf{Tst}(I, CB)$ definito come:



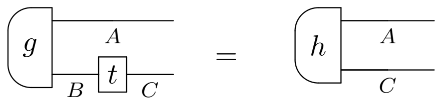
è detto *stato di Choi* della trasformazione g_j con stato faithful $\{f\}$.

[3]Si veda [5].

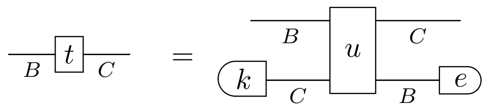
5.3 Implicazioni del postulato di purificazione

Si dimostrano ora alcune proposizioni e lemmi necessari alle dimostrazioni di due importanti risultati: la versione astratta del teorema di Ozawa (teorema 5.23) ed il teorema di massimalità di una teoria con purificazione (teorema 5.26).
Innanzitutto si caratterizza la relazione che vi è fra due purificazioni di uno stato le quali hanno sistema purificante distinto.

Proposizione 5.19. *Data* $\mathbf{T}$ *teoria, siano* $A, B, C \in |\mathbf{T}|$ *sistemi,* $\{f\} \in \mathbf{Tst}(I, A)$ *stato deterministico,* $\{g\} \in \mathbf{Tst}(I, AB)$ *e* $\{h\} \in \mathbf{Tst}(I, AC)$ *due purificazioni dello stato* $\{f\}$*. Allora* $\exists\ \{t\} \in \mathbf{Tst}(B, C)$ *trasformazione deterministica tale che*

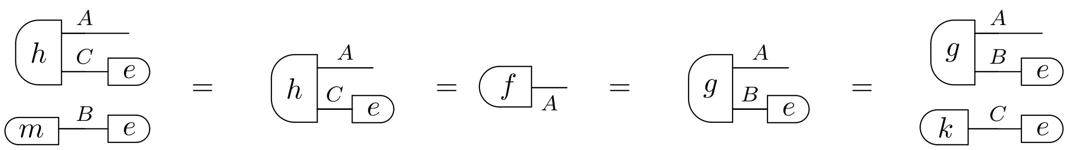


ove $\{t\}$ *ha la forma*

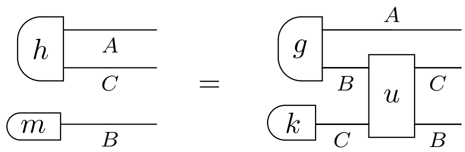


per un opportuno stato puro deterministico $\{k\} \in \mathbf{Tst}(I, C)$ *ed una trasformazione deterministica reversibile* $\{u\} \in \mathbf{Tst}(BC, BC)$.

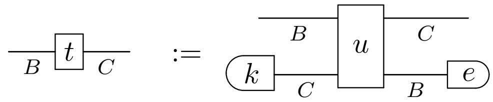
Dimostrazione. Siano $\{k\} \in \mathbf{Tst}(I, C)$ e $\{m\} \in \mathbf{Tst}(I, B)$ due stati puri deterministici. $g \otimes k \in \mathbf{Tst}(I, ABC)$ e $h \otimes m \in \mathbf{Tst}(I, ABC)$ sono stati deterministici puri per l'assioma 1. Essi costituiscono inoltre due purificazioni di $\{f\}$ con sistema purificante BC, infatti:



Per l'assioma 2 segue che esiste una trasformazione deterministica reversibile $\{u\} \in \mathbf{Tst}(BC, BC)$ tale che:



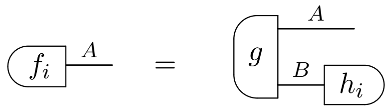
Applicando l'effetto deterministico su B segue la tesi



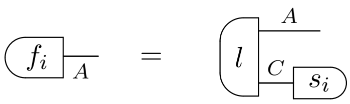
□

Si procede quindi dimostrando che ogni test di preparazione può essere descritto tramite un test di osservazione applicato su un opportuno sistema purificante.

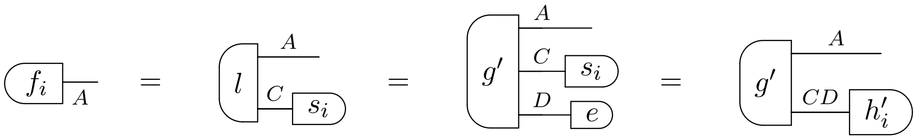
Proposizione 5.20. *Data* $\mathbf{T}$ *teoria, sia* $A \in |\mathbf{T}|$ *sistema,* $\{f_i\} \in \mathbf{Tst}(I, A)$ *test di preparazione,* $\{g\} \in \mathbf{Tst}(I, AB)$ *purificazione del coarse-graining* $\{f\}$ *del test di preparazione* $\{f_i\}$ *con sistema purificante* $B \in |\mathbf{T}|$. *Allora* $\exists\ \{h_i\} \in \mathbf{Tst}(B, I)$ *test di osservazione tale che*



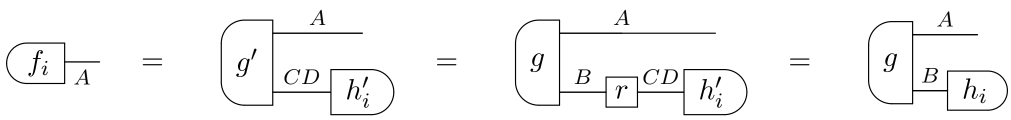
Dimostrazione. Sia $C \in |\mathbf{T}|$ sistema e siano $\{t_i\} \in \mathbf{Tst}(I, C)$ un test di preparazione e $\{s_i\} \in \mathbf{Tst}(C, I)$ un test di osservazione costituiti dallo stesso numero di elementi di $\{f_i\}$ e tali che $\hat{s}_i(t_j) = T(s_i t_j) = \delta_{i,j}$. Sia $\{l\} \in \mathbf{Tst}(I, AB)$ stato deterministico tale che $\hat{l} = \sum_i \hat{f}_i \otimes \hat{t}_i$. Per costruzione $\hat{l}(s_{i_0}) = \sum_i \hat{f}_i \otimes \hat{t}_i(s_{i_0}) = \hat{f}_{i_0}$ da cui



Sia ora $\{g'\} \in \mathbf{Tst}(I, ACD)$ una purificazione di $\{l\}$ con sistema purificante $D \in |\mathbf{T}|$. Valgono allora le relazioni



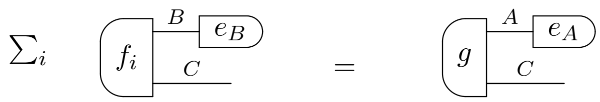
ove si è introdotto l'effetto $h'_i \in \mathbf{Top}(CD, I)$ tale che $\hat{h'}_i = \widehat{e_D} \otimes \widehat{s_i}$. Eseguendo un coarse-graining sui termini estremali delle relazioni fra diagrammi segue che $\{g'\}$ è purificazione dello stato deterministico $\{f\}$ con sistema purificante CD. Sia ora $\{g\} \in \mathbf{Tst}(I, AB)$ una generica purificazione di $\{f\}$ con sistema purificante $B \in |\mathbf{T}|$. Applicando la proposizione 5.19 segue che $\exists \{r\} \in \mathbf{Tst}(B, CD)$ trasformazione deterministica tale che:



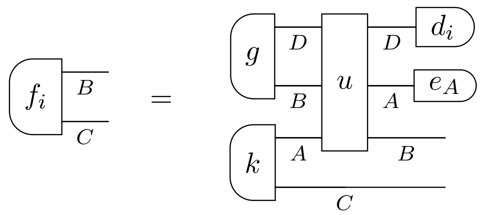
ove si è introdotto l'effetto $h_i \in \mathbf{Top}(B, I)$ tale che $\hat{h}_i = \widehat{h'_i r}$. Dall'uguaglianza fra gli estremi dell'ultima relazione segue la tesi. □

Si dimostrano ora due lemmi tecnici necessari alla comprensione dell'esatto significato degli enunciati dei teoremi che successivamente si esporranno.

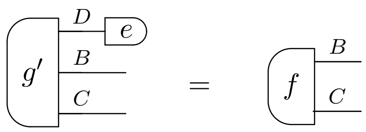
Lemma 5.21. *Data* **T** *teoria, siano* $A, B, C \in |\mathbf{T}|$ *sistemi,* $\{f_i\} \in \mathbf{Tst}(I, BC)$ *test di preparazione,* $\{g\} \in \mathbf{Tst}(I, AC)$ *stato puro deterministico tali che*



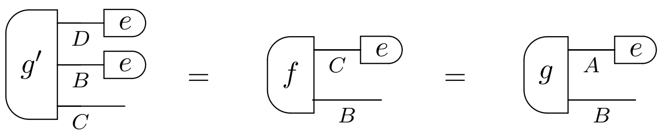
Allora $\exists\ D \in |\mathbf{T}|$, $\exists\ \{k\} \in \mathbf{Tst}(I, DB)$ *stato puro deterministico,* $\exists\ \{d_i\} \in \mathbf{Tst}(D, I)$ *test di osservazione, tali che* $\forall f_i \in \{f_i\}$*:*



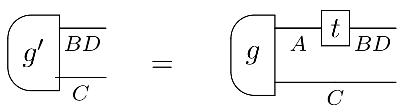
Dimostrazione. Sia $\{g'\} \in \mathbf{Tst}(I, BCD)$ una purificazione del coarse-graining $\{f\}$ di $\{f_i\}$. Segue che

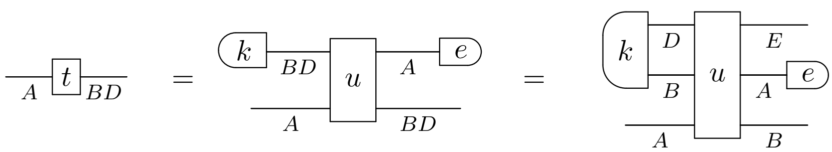


Componendo con l'effetto deterministico del sistema B si ottiene

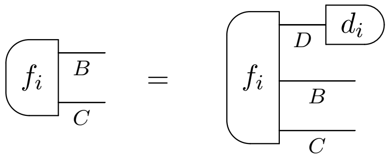


Poichè $\{g'\}$ e $\{g\}$ sono purificazioni dello stesso stato marginale su C segue che per la proposizione 5.19 $\exists\{t\} \in \mathbf{Tst}(A, DB)$ trasformazione deterministica, $\{k\} \in \mathbf{Tst}(I, DB)$ stato puro deterministico, $\{u\} \in \mathbf{Tst}(ADB, ADB)$ trasformazione deterministica reversibile, tali che

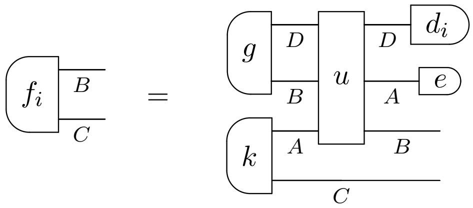




Essendo $\{g'\}$ una purificazione di $\{f\}$ per la proposizione 5.20 $\exists\ \{d_i\} \in \mathbf{Tst}(D, I)$ test di osservazione tale che



Segue quindi la tesi

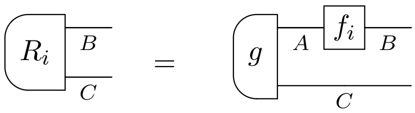


□

Lemma 5.22. *Data* $\mathbf{T}$ *teoria, siano* $A, B, C \in |\mathbf{T}|$ *sistemi,* $\{f_i\} \in \mathbf{Tst}(A, B)$ *test,* $\{g\} \in \mathbf{Tst}(I, AC)$ *stato puro faithful per il sistema* A. *Allora la mappa* $\mathcal{R}_g : f_i \to R_{f_i}$ *che associa ad una trasformazione lo stato di Choi corrispondente, con* $\{g\}$ *stato faithful, definisce una mappa biettiva fra i test* $\{f_i\}$ *e i test di preparazione* $\{R_i\} \in \mathbf{Tst}(I, BC)$ *tale che*

$$\sum_{R_i \in \{R_i\}} \hat{R}_i(e_B) = \hat{g}(e_A) \tag{5.1}$$

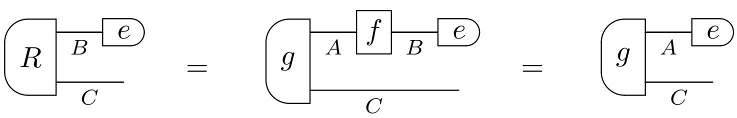
Dimostrazione. Iniettività. Si deve verificare che la mappa $\mathcal{R}_g$ associa a test distinti fra i sistemi A e B test di preparazione distinti. Sia $\{f_i\} \in \mathbf{Tst}(A, B)$ e si consideri il test di preparazione $\{R_i\}$ ad esso associato tramite la mappa $\mathcal{R}_g$. Segue che per costruzione $R_i = R_{f_i}$, e vale



Sia $\{f'_i\} \in \mathbf{Tst}(A, B)$ un altro test a cui si associa analogamente il test di preparazione $\{R'_i\}$. Poichè $\{g\}$ è uno stato faithful segue dalla definizione 5.14 che

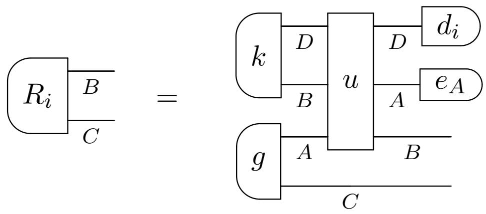
$$\hat{f}_i(g) = \{R_i\} = \{R'_i\} = \hat{f}'_i(g) \quad \Rightarrow \quad \{f_i\} = \{f'_i\}$$

Invertendo l'implicazione si ottiene esattamente la condizione di iniettività. Operando gli opportuni coarse-graining e sfruttando il corollario 4.7 si ottiene:

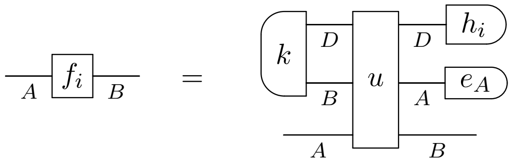


che coincide con l'equazione 5.1.
Suriettività. Si deve verificare che ad ogni test di preparazione $\{R_i\} \in \mathbf{Tst}(I, BC)$ è possibile associare un test $\{f_i\} \in \mathbf{Tst}(A, B)$ tale che $R_i = R_{f_i}$. Sia $\{R_i\} \in \mathbf{Tst}(I, BC)$ un test di preparazione che soddisfa l'equazione 5.1. Poiché $\{g\}$ è uno stato puro è

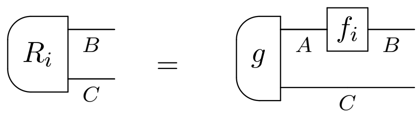
applicabile il lemma 5.21 da cui $\exists\ D \in |\mathbf{T}|$, $\exists\ \{k\} \in \mathbf{Tst}(I, DB)$ stato puro deterministico, $\exists\ \{u\} \in \mathbf{Tst}(I, ABD)$ test deterministico reversibile, $\exists\ \{d_i\} \in \mathbf{Tst}(D, I)$ test di osservazione, tali che $\forall R_i \in \{R_i\}$



Definendo il test $\{f_i\} \in \mathbf{Tst}(A, B)$ come

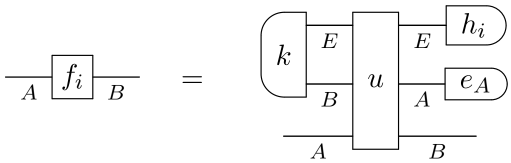


la suriettività è verificata poichè si ottiene la relazione



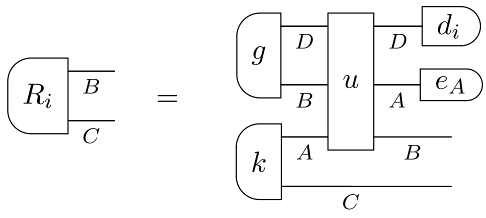
□

Teorema 5.23. *Data* $\mathbf{T}$ *teoria, siano* $A, B \in |\mathbf{T}|$ *sistemi,* $\{f_i\} \in \mathbf{Tst}(A, B)$ *test. Allora* $\exists\ D \in |\mathbf{T}|$ *sistema,* $\exists\ \{k\} \in \mathbf{Tst}(I, DB)$ *stato puro deterministico,* $\exists\ \{u\} \in \mathbf{Tst}(I, ABD)$ *test deterministico reversibile,* $\exists\ \{d_i\} \in \mathbf{Tst}(D, I)$ *test di osservazione, tali che*

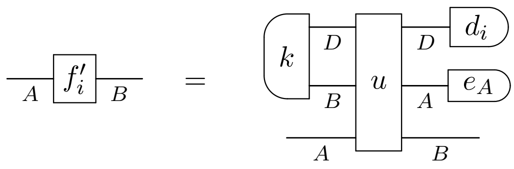


Si procede quindi col dimostrare il secondo importante risultato riportato in questo lavoro, ovvero la versione astratta del teorema di Ozawa.

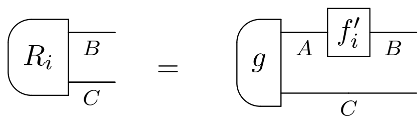
Dimostrazione. Sia $\{g\} \in \mathbf{Tst}(I, AC)$ uno stato puro faithful. Per il lemma 5.22 segue che posso associare al test $\{f_i\}$ tramite la mappa $\mathcal{R}_g$ un test di preparazione $\{R_i\} \in \mathbf{Tst}(I, BC)$ costituito dagli stati di Choi associati alle trasformazioni f_i relative allo stato faithful g che soddisfino l'equazione 5.1. Sul test di preparazione $\{R_i\}$ è quindi applicabile il lemma 5.21, da cui segue che $\exists\ D \in |\mathbf{T}|$ sistema, $\exists\ \{k\} \in \mathbf{Tst}(I, DB)$ stato puro deterministico, $\exists\ \{u\} \in \mathbf{Tst}(I, ABD)$ test deterministico reversibile, $\exists\ \{d_i\} \in \mathbf{Tst}(D, I)$ test di osservazione, tali che:



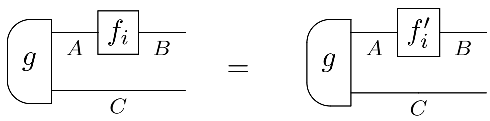
Definendo il test $\{f'_i\} \in \mathbf{Tst}(A, B)$ come



Segue che



E quindi si ottiene



Poichè lo stato $\{g\}$ è per ipotesi uno stato puro faithful si ottiene che $f_i = f'_i$ $\forall i$ da cui $\{f_i\} = \{f'_i\}$ che prova la tesi. $\square$

Osservazione 5.24. Il teorema appena dimostrato, oltre ad estendendere i risultati del capitolo 2 in ambito astratto, permette di completare la dimostrazione del teorema 2.7.

Sfruttando i lemmi introdotti è inoltre possibile dedurre un ulteriore importante risultato che concerne il ruolo che hanno gli stati nel caratterizzare una teoria. In particolare si verifica che diretta conseguenza dell'assioma di purificazione è la massimalità della teoria rispetto alla specificazione degli stati, ovvero due teorie aventi medesimi stati devono avere anche i medesimi test e quindi coincidere.

Proposizione 5.25. *Siano* $\mathbf{T}, \mathbf{P}$ *due teorie. Se* $\mathbf{P}$ *è un'estensione di* $\mathbf{T}$*, ovvero* $|\mathbf{T}| = |\mathbf{P}|$ *e* $\forall A, B \in |\mathbf{T}|$ $\mathbf{Tst}(A, B) \subseteq \mathbf{Pst}(A, B)$*, e stati e test di preparazione coincidono, ovvero* $\forall A \in |\mathbf{T}|$ $\mathbf{Top}(I, A) = \mathbf{Pop}(I, A)$ *e* $\mathbf{Tst}(I, A) = \mathbf{Pst}(I, A)$*, allora le teorie coincidono*[4].

Dimostrazione. La dimostrazione si riduce a verificare che è possibile definire una mappa iniettiva dai test in P ai test in T. Se tale mappa esiste le relazioni insiemistiche si riducono a uguaglianze e pertanto le due teorie coincidono.
Per il corollario 5.17 P ammette uno stato puro faithful $\{g\} \in \mathbf{Pst}(I, AC)$ il quale permette di definire, per il lemma 5.22, una mappa biettiva $\mathcal{R}_g$ fra i test $\{f_i\} \in \mathbf{Pst}(A, B)$

[4] Due teorie coincidono se possiedono gli stessi sistemi, gli stessi test e le stesse trasformazioni.

e i test di preparazione che soddisfano l'equazione 5.1 $\{R_i\} \in \mathbf{Pst}(I, BC)$. Poichè anche T ammette uno stato puro faithful $\{g'\}$ è applicabile nuovamente il lemma 5.22 ed è quindi possibile definire un'ulteriore mappa biettiva $\mathcal{R}'_g$ fra i test $\{f'_i\} \in \mathbf{Tst}(A, B)$ e i test di preparazione che soddisfano l'equazione 5.1 $\{R'_i\} \in \mathbf{Tst}(I, BC)$. Infine poichè per ipotesi $\mathbf{Pst}(I, BC) = \mathbf{Tst}(I, BC)$ la composizione delle due mappe biettive induce una mappa biettiva sui test da cui segue la tesi. □

Teorema 5.26. *Se due teorie* $\mathbf{T}$ *e* $\mathbf{P}$ *hanno i medesimi stati e i medesimi test di preparazione allora coincidono.*

Dimostrazione. Si consideri la teoria $\mathbf{T} \cup \mathbf{P}$. Poichè valgono le relazioni $\mathbf{T} \subseteq (\mathbf{T} \cup \mathbf{P})$ e $\mathbf{P} \subseteq (\mathbf{T} \cup \mathbf{P})$ è applicabile la proposizione 5.25 da cui segue $\mathbf{T} = (\mathbf{T} \cup \mathbf{P}) = \mathbf{P}$. □

I risultati ottenuti hanno fatto emergere in maniera netta il ruolo centrale e al contempo delicato che ha la nozione di stato all'interno di una teoria. Col il teorema 5.26, in particolare, si è dimostrato come la sola specificazione degli stati definisca completamente una teoria. Al contempo si è però osservato che, se dal punto di vista probabilistico non si incorre in alcun problema nel manipolare gli stati tramite il formalismo presentato, dal punto di vista fisico alcune operazioni formali fanno variare radicalmente la natura di uno stato e l'interpretazione data ai fenomeni che vengono modellizzati. Banalmente, l'operazione di coarse-graining permette di descrivere equivalentemente un sistema come posto in uno stato puro o in uno stato misto. Da ciò si può cogliere che un'eventuale via di sviluppo ed innovazione dovrà essere ricercata in un formalismo al cui cuore non vi sia alcuna criticità nella definizione di quale sia lo stato del sistema e che non si pieghi a trascurare l'ambiguità di postulati e definizioni in virtù della loro irrilevanza nell'ottenimento di previsioni.

Conclusioni

Il formalismo delle OPT risulta essere un formalismo potente ed efficace che, una volta ben definito, è applicabile in modo rapido ed intuitivo; da molte delle dimostrazioni riportate si potrebbero infatti omettere le descrizioni esplicite dei passaggi eseguiti. I risultati ottenuti mostrano quindi che il proposito di costruzione di un'assiomatica basata su principi fisici priva di riferimenti a strutture matematiche astratte è realizzabile. Tale obiettivo è però ben lungi dall'essere raggiunto in quanto la formalizzazione è relegata al caso di sistemi ed operatori associati a spazi di dimensione finita. Un eventuale superamento di tale ostacolo dovrà sicuramente fornire innanzitutto una formulazione operazionale della meccanica quantistica nel caso infinito dimensionale che funga da prototipo. Il primo passo in tal senso si può pertanto individuare nella risoluzione del problema aperto della caratterizzazione degli operatori di Kraus in dimensione infinita. Il formalismo presentato può ritenersi interessante anche se non è in grado di replicare interamente quello basato sugli spazi di Hilbert poichè è perfettamente applicabile nell'ambito dell'informazione quantistica (il Qbit è definito su spazi di Hilbert $\mathbb{C}^n$) e ne risulta il formalismo proprio.

APPENDICE A

Categorie monoidali simmetriche

Di seguito saranno fornite definizioni di nozioni aventi grande rilevanza all'interno della teoria delle categorie ma che saranno pressocchè inutilizzate all'interno dell'eleborato, se non per enunciare sinteticamente alcuni importanti risultati che garantiscono la possibilità di un linguaggio grafico consistente. Innanzitutto si specifica la nozione di *funtore*, ovvero di applicazione fra categorie che ne conserva la struttura.

Definizione A.1. Siano $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ due categorie. Un *funtore* $\mathcal{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ consiste di:

1 Una mappa fra gli oggetti $\mathcal{F} : |\mathbf{C}| \to |\mathbf{D}| :: A \to \mathcal{F}(A)$.

2 Una mappa fra i morfismi $\mathcal{F} : \mathbf{C}(A, B) \to \mathbf{D}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B)) :: f \to \mathcal{F}(f)$,
$\forall\, A, B, C \in \mathbf{C}$, $f \in \mathbf{C}(A, B)$, $g \in \mathbf{C}(B, C)$, tale che:

- preservi la composizione, ovvero $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$;
- preservi l'identità, ovvero $\mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}$.

Si introducono quindi le nozioni di *trasformazione naturali* ed *isomorfismo naturali*, le quali agiscondo come mappe fra funtori.

Definizione A.2. Siano $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ due funtori. Una *trasformazione naturale* $\tau : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ consiste di una famiglia di morfismi

$$\{\tau_A \in \mathcal{D}(\mathcal{F}(A), \mathcal{G}(A) | A \in |\mathbf{C}|\}$$

tali che $\forall A, B \in |\mathbf{C}|$, $\forall f \in \mathbf{C}(A, B)$, $\tau_B \circ \mathcal{F}(f) = \mathcal{G}(f) \circ \tau_A$, ovvero che commuti il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{G}(A) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\
\mathcal{F}(B) \arrow[r, "\tau_A"'] & \mathcal{G}(B)
\end{tikzcd}$$

Di seguito si riportano alcuni esempi di isomorfismi naturali al fine di specificare in maniera concreta tale nozione astratta.

Esempio A.3. Sono isomorfismi naturali: (a) La famiglia di isomorfismi introdotti nella definizione di categoria monoidale simmetrica stretta (definizione 1.7) costituenti le *simmetrie*. (b) La famiglia di isomorfismi di riarrangiamento delle parentesi (rebraketing), la quale è detta *associatività*. (c) La famiglia di isomorfi esistente fra due *rappresentazioni di gruppo equivalenti*.

Vi sono ora tutti gli elementi per introdurre la categoria astratta atta a poter essere specificata preservando la consistenza del formalismo grafico tramite una categoria concreta avente oggetti con struttura matematica basata sulla teoria degli insiemi.

Definizione A.4. Data una categoria $\mathbf{C}$, essa è detta *categoria monoidale* se:

1 $\exists\, I \in |\mathbf{C}|$

2 $\exists\, \otimes$ operazione bifuntoriale (ovvero un'operazione definita sia sui morfismi che sugli oggetti) tale che $\forall\, A, B \in |\mathbf{C}|$, $\forall\, f, g, h, k$ con domini appropriati:

- $(g \circ f) \otimes (k \circ h) = (g \otimes k) \circ (f \otimes h)$
- $1_A \otimes 1_B = 1_{A \otimes B}$

3 $\exists\, \alpha, \lambda, \rho$ isomorfismi naturali

$$\alpha = \left\{ A \otimes (B \otimes C) \xrightarrow{\alpha_{A,B,C}} (A \otimes B) \otimes C \quad | \quad A, B, C \in |\mathbf{C}| \right\}$$

$$\lambda = \left\{ A \xrightarrow{\lambda_A} I \otimes A \quad | \quad A \in |\mathbf{C}| \right\} \qquad \rho = \left\{ A \xrightarrow{\rho_A} A \otimes I \quad | \quad A \in |\mathbf{C}| \right\}$$

tali che soddisfino le *condizioni di coerenza*:

- $\forall\, A, B, C, A', B', C' \in |\mathbf{C}|$, $\forall\, f \in \mathbf{C}(A, A')$, $\forall\, g \in \mathbf{C}(B, B')$, $\forall\, h \in \mathbf{C}(C, C')$ commuti il diagramma

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "\alpha_{A,B,C}"] \arrow[d, "f\otimes(g\otimes h)"'] & (A \otimes B) \otimes C \arrow[d, "(f\otimes g)\otimes h"] \\
A' \otimes (B' \otimes C') \arrow[r, "\alpha_{A',B',C'}"'] & (A' \otimes B') \otimes C'
\end{tikzcd}$$

- $\forall\, A, B \in |\mathbf{C}|$, $\forall\, f \in \mathbf{C}(A, B)$ commutino i diagrammi

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\lambda_A"] \arrow[d, "f"'] & I \otimes A \arrow[d, "1_I\otimes f"] \\
B \arrow[r, "\lambda_B"'] & I \otimes B
\end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\rho_A"] \arrow[d, "f"'] & A \otimes I \arrow[d, "f\otimes 1_I"] \\
B \arrow[r, "\rho_B"'] & B \otimes I
\end{tikzcd}$$

- $\forall\ A, B, C, D \in |\mathbf{C}|$ commuti il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[dr, "\alpha_{(A\otimes B),C,D}"] & \\
A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \arrow[ur, "\alpha_{A,B,(C\otimes D)}"] \arrow[d, "1_A \otimes \alpha_{B,C,D}"'] & & ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \\
A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[rr, "\alpha_{A,(B\otimes C),D}"'] & & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[u, "\alpha_{A,B,C} \otimes 1_D"']
\end{tikzcd}$$

- $\forall A, B \in |\mathbf{C}|$ commuti il diagramma

$$\begin{tikzcd}
A \otimes B \arrow[r, "1_A \otimes \lambda_B"] \arrow[dr, "\rho_A \otimes 1_B"'] & A \otimes (I \otimes B) \arrow[d, "\alpha_{A,I,B}"] \\
 & (A \otimes I) \otimes B
\end{tikzcd}$$

- $\lambda_I = \rho_I$.

Una categoria monoidale è detta simmetrica se:

4 $\exists\ \sigma$ isomorfismo naturale

$$\sigma = \left\{ A \otimes B \xrightarrow{\sigma_{A,B}} B \otimes A \ \mid\ A, B \in |\mathbf{C}| \right\}$$

tale che soddisfi le condizioni di coerenza

- $\forall\ A, B, C, D \in |\mathbf{C}|$, $\forall\ f \in \mathbf{C}(A, C)$, $\forall g \in \mathbf{C}(B, D)$ commuti il diagramma

$$\begin{tikzcd}
A \otimes B \arrow[r, "\sigma_{A,B}"] \arrow[d, "f\otimes g"'] & B \otimes A \arrow[d, "g \otimes f"] \\
C \otimes D \arrow[r, "\sigma_{C,D}"'] & D \otimes C
\end{tikzcd}$$

- $\forall\ A, B \in |\mathbf{C}|$ commuti il diagramma

$$\begin{tikzcd}
A \otimes B \arrow[r, "\sigma_{A,B}"] \arrow[dr, "1_{A\otimes B}"'] & B \otimes A \arrow[d, "\sigma_{B,A}"] \\
 & A \otimes B
\end{tikzcd}$$

- $\forall\ A \in |\mathbf{C}|$ commuti il diagramma

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\lambda_A"] \arrow[dr, "\rho_A"'] & I \otimes A \arrow[d, "\sigma_{I,A}"] \\
 & A \otimes I
\end{tikzcd}$$

- $\forall\, A, B, C \in |\mathbf{C}|$ commuti il diagramma

$$\begin{tikzcd} A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "\alpha_{A,B,C}"] \arrow[d, "1_A \otimes \sigma_{B,C}"'] & (A \otimes B) \otimes C \arrow[r, "\sigma_{(A\otimes B),C}"] & C \otimes (A \otimes B) \arrow[d, "\alpha_{C,A,B}"] \\ A \otimes (C \otimes B) \arrow[r, "\alpha_{A,C,B}"'] & (A \otimes C) \otimes B \arrow[r, "\sigma_{A,C} \otimes 1_B"'] & (C \otimes A) \otimes B \end{tikzcd}$$

Rendere consistente il formalismo ha evidentemente un impatto importante e rende necessario porre delle definizioni estremamente cavillose e lunghe. Di base non è scontato nemmeno che le condizioni di coerenza[1] che sono state imposte siano sufficienti ad applicare indiscriminatamente associatività e commutatività ma si vedrà successivamente che per il corollario A.10 la definizione è ben posta.

Osservazione A.5. Una SSMC è una categoria monoidale simmetrica ove tutti gli isomorfismi naturali precedentemente elencati divengono delle banali identità (non vale il viceversa).

Al fine di enunciare i teoremi che correlano le categorie monoidali e le categorie monoidali strette si specifica la definizione di equivalenza fra categorie

Definizione A.6. Date due categorie $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, esse sono dette *categorialmente equivalenti* se $\exists\, \mathcal{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, $\exists\, \mathcal{G} : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ funtori tali che $\exists\, \tau_{\mathbf{C}} : \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \overset{\sim}{\Rightarrow} 1_{\mathcal{C}}$ e $\exists\, \tau_{\mathbf{D}} : \mathcal{F} \circ \mathcal{G} \overset{\sim}{\Rightarrow} 1_{\mathcal{D}}$.

Remark A.7. L'equivalenza categoriale di due categorie è più debole sia della nozione di equivalenza stretta che della nozione di equivalenza a meno di isomorfisi. Essa afferma infatti l'equivalenza a meno di isomorfismi dei funtori che legano le categorie e non delle categorie stesse. Ad essere la medesima è dunque unicamente la struttura di categoria e non la struttura particolare degli oggetti e dei morfismi delle due categorie.

Si introduce quindi la nozione di funtore monoidale simmetrico. Tale definizione è funzionale a meglio specificare una formulazione di equivalenza categoriale più forte, con la quale vengano conservate le più ricche strutture delle categorie monoidali simmetriche.

Definizione A.8. Siano $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ due categorie monoidali simmetriche denotate, rispettivamente, tramite i simboli $(\mathbf{C}, \otimes, I, \alpha_{\mathbf{C}}, \lambda_{\mathbf{C}}, \rho_{\mathbf{C}}, \sigma_{\mathbf{C}})$ e $(\mathbf{D}, \odot, J, \alpha_{\mathbf{D}}, \lambda_{\mathbf{D}}, \rho_{\mathbf{D}}, \sigma_{\mathbf{D}})$. Un *funtore monoidale simmetrico* consiste di:

1 Un funtore $\mathcal{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$.

2 Una trasformazione naturale $\phi_{\_,\_} : \mathcal{F}(-) \odot \mathcal{F}(-) \Rightarrow \mathcal{F}(- \otimes -)$ con associata la famiglia di morfismi $\{\ \phi_{A,B} : \mathcal{F}(A) \odot \mathcal{F}(B) \Rightarrow \mathcal{F}(A \otimes B)\ \mid\ A, B \in |\mathbf{C}|\ \}$

3 Un morfismo $\psi : J \to \mathcal{F}(I)$

[1] Della nozione di *coerenza* non è stata data definizione specifica in quanto non necessaria, però è necessario che sia ben distinta dalla nozione di *consistenza*. Intuitivamente, la richiesta della consistenza equivale alla richiesta di assenza di paradossi logici; la richiesta della coerenza equivale alla richiesta della commutazione di tutti i diagrammi formulabili tramite gli enti introdotti nella definizione di categoria monoidale.

Tali che $\forall A, B, C \in |\mathbf{C}|$ commutino i diagrammi

$$\begin{tikzcd}
(\,\mathcal{F}(A) \odot \mathcal{F}(B)\,) \odot \mathcal{F}(C) \arrow[r, "\phi_{A,B} \odot 1_{\mathcal{F}(C)}"] \arrow[d, "\alpha^{-1}_{\mathbf{D},\mathcal{F}(A),\mathcal{F}(B),\mathcal{F}(C)}"'] & \mathcal{F}(A \otimes B) \odot \mathcal{F}(C) \arrow[d, "\phi_{(A\otimes B),C}"] \\
\mathcal{F}(A) \odot (\,\mathcal{F}(B) \odot \mathcal{F}(C)\,) \arrow[d, "\alpha_{\mathcal{F}(A),\mathcal{F}(B),\mathcal{F}(C)}"'] & \mathcal{F}((A \otimes B) \otimes C) \arrow[d, "\mathcal{F}\left(\alpha^{-1}_{\mathbf{C},A,B,C}\right)"] \\
\mathcal{F}(A) \odot \mathcal{F}(B \otimes C) \arrow[r, "\phi_{A,B\otimes C}"'] & \mathcal{F}(A \otimes (B \otimes C))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(A) \odot J \arrow[r, "1_{\mathcal{F}(A)} \odot \psi"] \arrow[d, "\rho^{-1}_{\mathbf{D},\mathcal{F}(A)}"'] & \mathcal{F}(A) \odot \mathcal{F}(I) \arrow[d, "\phi_{A,I}"] \\
\mathcal{F}(A) \arrow[r, "\mathcal{F}(\rho^{-1}_{\mathbf{C},A})"'] & \mathcal{F}(A \otimes I)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
J \odot \mathcal{F}(B) \arrow[r, "\psi \odot 1_{\mathcal{F}(B)}"] \arrow[d, "\lambda^{-1}_{\mathbf{D},B}"'] & \mathcal{F}(I) \odot \mathcal{F}(B) \arrow[d, "\phi_{I,B}"] \\
\mathcal{F}(B) \arrow[r, "\mathcal{F}(\lambda^{-1}_{\mathbf{C},B})"'] & \mathcal{F}(I \otimes B)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(A) \odot \mathcal{F}(B) \arrow[r, "\sigma_{\mathcal{F}(A) \odot \mathcal{F}(B)}"] \arrow[d, "\phi_{A,B}"'] & \mathcal{F}(B) \odot \mathcal{F}(A) \arrow[d, "\phi_{A,B}"] \\
\mathcal{F}(A \otimes B) \arrow[r, "\mathcal{F}(\sigma_{A,B})"'] & \mathcal{F}(B \otimes A)
\end{tikzcd}$$

Un funtore monoidale simmetrico è detto *forte* se ϕ è un isomorfismo naturale e ψ un isomorfismo.

Si possono quindi enunciare i risultati fondamentali che legano formalmente le strutture di SSMC alla struttura di categoria monoidale.

Teorema A.9. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria monoidale simmetrica. Allora esiste una SSMC* $\mathbf{D}$ *ed un funtore monoidale simmetrico forte* $\mathcal{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *rispetto al quale* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *sono categorialmente equivalenti.*

Dimostrazione. Omessa. [2]

□

Corollario A.10. *Siano* $\mathbf{C}$ *una categoria monoidale simmetrica e* $\mathbf{D}$ *una SSMC. Se* $\mathbf{C}$ *è categorialmente equivalente a* $\mathbf{D}$ *attraverso un funtore monoidale simmetrico forte* $\mathcal{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$*, allora l'operazione bifuntoriale* $\otimes$ *è coerente (ovvero la definizione di categoria simmetrica monoidale è ben posta in quanto le condizioni di coerenza sono sufficienti a garantire che commutino tutti i diagrammi definibili).*

Dimostrazione. Omessa. [3]

□

[2] Si veda [14], pag. 257, Theorem 1.
[3] Si veda [14], pag. 259, Theorem 2.

Osservazione A.11. Da questi ultimi risultati segue che:

1. Il corollario A.10 garantisce che la definizione A.4 sia ben posta.
2. Il teorema A.9 garantisce che il formalismo grafico generi proposizioni valide anche per le categorie monoidali simmetriche, essendo queste categorialmente equivalenti tramite funtori monoidali simmetrici forti alle SSMC
3. La modellizzazione formale della nozione di teoria fisica, ovvero la struttura di categoria simmetrica monoidale stretta, è compatibile con la modellizzazione formale (propria della particolare teoria fisica) di oggetti e morfismi tramite opportuni enti matematici basati sulla teoria degli insiemi.[4]

[4] Un esempio di teoria fisica presentante due modellizzazioni differenti è la meccanica quantistica con i framework di Heisenberg e Schroedinger.

Bibliografia

[1] Coecke Bob. ≪Quantum picturalism≫. In: *Contemporary Physics* 51.1 (2010), pp. 59–83.

[2] Coecke Bob e Paquettè Eric Oliver. ≪Categories for the practising physicist≫. In: *Coecke B. (eds) New Structures for Physics*. Springer, 2010, pp. 173–286.

[3] Cohen-Tannoundji Claude. *Quantum mechanics*. Vol. 1. John Wiley & Sons, 2005.

[4] Chiribella G., G. M. D'Ariano e P. Perinotti. ≪Informational derivation of Quantum Theory≫. In: *Phys. Rev. A* 84 (2011).

[5] Chiribella G., G. M. D'Ariano e P. Perinotti. ≪Probabilistic theory with purfication≫. In: *Phys. Rev. A* 81 (2010).

[6] Chiribella G., G. M. D'Ariano e P. Perinotti. *Quantum Theory From First Principles: An Informational Approach*. Cambridge University Press, 2017.

[7] Ghirardi G. ≪I fondamenti cocettuali e le implicazioni epistemologiche della meccanica quantistica≫. In: *Filosofia della fisica*. Edizioni Scolastiche Bruno Mondadori, 1997, pp. 335–608.

[8] Adàmek J. e Herrlich Horst. *Abstract and Concrete Categories. The Joy of Cats*. 2004. URL: `http://katmat.math.uni-bremen.de/acc`.

[9] Selby John H., Scandolo Carlo Maria e Coecke Bob. *Reconstructing quantum theory from diagrammatic postulates*. 2018. arXiv: `1802.00367`.

[10] Nielsen M. A. e Chuang I. L. *An Axiomatic Basis for Quantum Mechanics. Derivation of Hilbert Space Structure*. Vol. 1. Springer, 1985.

[11] Nielsen M. A. e Chuang I. L. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge University Press, 2010.

[12] Akhiezer N.I. e Glazman I.M. *Theory of linear operators in Hilbert space*. Vol. 1-2. Dover publications, 1993.

[13] M. Ozawa. ≪Quantum measuring processes of continuous observables≫. In: *J. Math. Phys.* 25 (1984).

[14] Mac Lane Saunders. *Categories for the working Mathematician*. Springer, 1998.

[15] C. M. Scandolo. «Entanglement and thermodynamics in general probabilistic theories». Tesi di Laurea Magistrale. Università degli studi di Padova, 2014.

[16] P. Selinger. «A survey of graphical languages for monoidal categories». In: *Coecke B. (eds) New Structures for Physics*. Springer, 2010, pp. 289–355.

[17] Van Enk Steven J. *Mixed states and pure states*. 2009. URL: `http://pages.uoregon.edu/svanenk/solutions/Mixed_states.pdf`.

[18] W. K. Wootters. «Local accessibility of quantum states». In: *Complexity, entropy and the physics of information*. CRC Press, 1990, pp. 39–46.